

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

Курганский государственный университет

Кафедра «Фундаментальная математика»

УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор



Т.Р.Змбызова/

«07» сентября 2021 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

«Вариационное исчисление и методы оптимизации»

по образовательной программе высшего образования –  
программы специалитета

01.05.01 – Фундаментальная математика и механика

направленность:

Математическое и программное обеспечение информационных систем

Формы обучения: очная

Курган, 2021

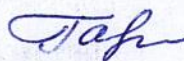
Рабочая программа дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» составлена в соответствии с учебным планом по программе специалитета 01.05.01 –Фундаментальные математика и механика (Математическое и программное обеспечение информационных систем) утвержденным:

-для очной формы обучения 30.08.2021 г.

Рабочая программа дисциплины одобрена на заседании кафедры «Фундаментальной математики» «6» сентября 2021 года, протокол № 1

Рабочую программу составил

Заведующий кафедрой

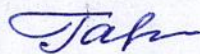


М.В. Гаврильчик.

Фундаментальной математики

Согласовано:

Заведующий кафедрой



М.В. Гаврильчик.

Фундаментальной математики

Специалист по учебно-методической  
работе учебно-методического отдела



Г.В. Казанкова

Начальник управления

образовательной деятельности



С.Н. Синецын

## 1. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

всего: 7 зачетных единицы (252 академических часа)

| Вид учебной работы   | На всю дисциплину | семестр |
|--|-------------------|---------|
|  |                   | 7       |
| Аудиторные занятия (контактная работа с преподавателем), всего часов | 84                | 84      |
| Лекционные   | 42                | 42      |
| Практические занятия   | 42                | 42      |
| Самостоятельная работа, всего часов, в том числе:                    | 168               | 168     |
| Подготовка к экзамену  | 27                | 27      |
| Контрольная работа   | 18                | 18      |
| Другие виды самостоятельной работы                                   | 123               | 123     |
| <b>Вид промежуточной аттестации</b>                                  | экзамен           | экзамен |
| <b>Общая трудоемкость дисциплины, часов</b>                          | 252               | 252     |

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Вариационное исчисление и методы оптимизации» входит в Блок 1 (обязательная дисциплина), соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования образовательной программы высшего образования – программы специалитета 01.05.01 – Фундаментальная математика и механика. Изучение вариационного исчисления и методов оптимизации, как одной из физико-математических дисциплин играет важную роль в подготовке специалистов по математическим направлениям.

Этот курс призван усилить прикладную направленность подготовки специалиста-математика. Он позволяет специалистам выработать у них необходимые знания для решения сложных естественнонаучных, экономических задач, в которых требуется выбор оптимальных параметров.

При изложении курса активно используются такие дисциплины как математический анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных.

## 3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

Целью изучения дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» является научное обоснование основных понятий, систематическое изложение основных разделов вариационного исчисления и методов решения задач оптимального управления, привитие навыков математического моделирования и использования моделей реальных процессов для нахождения решений прикладных задач.

Задачи курса: ознакомление студентов с ролью и местом теории вариационного исчисления и методов оптимизации в системе математических и других наук; ознакомление с методологией построения математических моделей реальных процессов.

При изложении курса активно используются такие дисциплины как математический анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных.

Процесс изучения дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» направлен на формирование следующей общепрофессиональной компетенции: способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении (ОПК -2).

В результате изучения дисциплины студент должен:

*Знать:* основные понятия курса, методы решения типовых задач; владеть основными понятиями, приемами решения задач (ОПК-2);

*Уметь:* использовать полученные знания для решения прикладных задач (ОПК-2);

*Владеть:* основными понятиями, приемами решения задач (ОПК-2).

## 4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 4.1. Учебно-тематический план

| Рубежный контроль | Номер раздела, темы                        | Наименование раздела, темы  | Количество часов контактной работы с преподавателем |                  |
|-------------------|--|---|---|------------------|
|                   |  |   | Лекции  | Практич. занятия |
| Рубеж 1           | 1  | Элементы дифференциального исчисления и выпуклого анализа.  | 2   | 0                |
|                   | 2  | Классическое вариационное исчисление. Исторические сведения. Основные понятия.  | 2   | 2                |
|                   | 3  | Вариационная задача с неподвижными концами.   | 4   | 4                |
|                   | 4  | Задача с подвижными концами   | 6   | 6                |
|                   | 5  | Достаточные условия экстремума  | 4   | 4                |
|                   | 6  | Задачи классического вариационного исчисления с ограничениями. Необходимые условия в изопериметрической задаче и задаче Лагранжа. | 6   | 6                |
|                   | 7  | Численные методы решения задач вариационного исчисления   | 4   | 4                |
|                   | Рубежный контроль №1<br>Контрольная работа |   |   | 2                |
| Рубеж 2           | 8  | Оптимальное управление и задачи техники. Задачи линейного программирования и проблемы экономики                                   | 8   | 8                |
|                   | 9  | Численные методы решения задач оптимального управления.   | 6   | 4                |
|                   | Рубежный контроль №2                       |   |   | 2                |
| <b>Всего:</b>     |  |   | 42  | 42               |

## 4.2 Содержание лекционных и практических занятий.

Раздел 1. Элементы дифференциального исчисления и выпуклого анализа.

Гладкие задачи с равенствами и неравенствами. Правило множителей Лагранжа.

Раздел 2. Классическое вариационное исчисление. Исторические сведения. Основные понятия.

Понятие функционала, непрерывный и линейный функционалы. Вариация функционала. Необходимое условие экстремума функционала. Определения сильного и слабого экстремума

Раздел 3. Вариационная задача с неподвижными концами. Уравнение Эйлера. Решение задач о брахистохроне, о наименьшей поверхности вращения. Задача с закрепленными концами в случае  $n$  неизвестных функций. Необходимое условие в задаче со старшими производными. Уравнение Эйлера – Пуассона. Уравнение Эйлера- Остроградского. Задача о поверхности наименьшей площади, натянутой на заданную кривую

Раздел 4. Простейшая задача с подвижными концами

Простейшая задача с подвижными концами. Задача с подвижными границами для функционалов вида  $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx$ .

Раздел 5. Достаточные условия экстремума. Условие Вейерштрасса. Условия второго порядка Лежандра и Якоби.

Раздел 6. Задачи классического вариационного исчисления с ограничениями. Необходимые условия в изопериметрической задаче и задаче Лагранжа.

Раздел 7. Численные методы решения задач вариационного исчисления.

Раздел 8. Оптимальное управление и задачи техники. Задачи линейного программирования и проблемы экономики.

Методы решения задач линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования. Графическое решение этих задач. Симплекс – метод. Взаимно двойственные задачи. Теорема двойственности. Двойственный симплекс- метод.

Раздел 9. Численные методы решения задач оптимального управления.

Градиентные методы. Методы сопряженных направлений, метод Ньютона.

## 4.3 Контрольные работы

Учебным планом предусмотрена контрольная работа. Каждое верно выполненное задание оценивается в 4 балла.

Цель контрольной работы: проверить знания, умения и навыки студентов в решении задач.

Текст контрольной работы приведен в методических указаниях и в разделе 6.4

## 5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО УСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Приступая к изучению дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации», необходимо повторить: основные понятия курсов «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения» и «Уравнения с частными производными».

Для успешного освоения курса «Вариационное исчисление и методы оптимизации», обязательно посещение лекций и практических занятий, регулярное конспектирование материала всех лекций и участие в обсуждении решения задач на практических занятиях.

При подготовке к практическим занятиям необходимо проработать теоретический материал, выполнить задания для самостоятельного решения по теме предыдущего занятия; после этого изучить теоретический материал очередного практического занятия. Подготовка нужна не только к практическим занятиям, но и к лекциям. Перед очередной лекцией необходимо повторить материал предыдущих лекций, так как материал новой лекции часто опирается на уже известный материал.

Систематическая подготовка к аудиторным занятиям и активное участие в рассмотрении вопросов, как на практических занятиях, так и на лекциях является залогом успешного прохождения рубежных контролей и промежуточных аттестаций по дисциплине «Вариационное исчисление и методы оптимизации».

Для текущего контроля успеваемости преподавателем используется балльно-рейтинговая система контроля и оценки активности обучающихся, что способствует лучшему освоению материала и получению высокой оценки по результатам освоения дисциплины.

Выполнение самостоятельной работы подразумевает самостоятельное изучение разделов дисциплины, подготовку к практическим занятиям и рубежным контролям, выполнение контрольной работы, подготовку к экзамену.

### Рекомендуемый режим самостоятельной работы.

| Наименование вида самостоятельной работы                 | Рекомендуемая трудоемкость, акад. час |
|--|---------------------------------------|
| 1. Углубленное изучение тем                              | 81                                    |
| - достаточные условия экстремума функционала             | 20                                    |
| - теория оптимального управления                         | 30                                    |
| - численные методы решения задач оптимального управления | 31                                    |
| 2. Подготовка к практическим занятиям                    | 38                                    |
| 3. Подготовка к контрольной работе                       | 18                                    |
| 4. Подготовка к экзамену                                 | 27                                    |
| 5. Подготовка к рубежным контролям                       | 4                                     |
| Итого  | 168                                   |

### 6. Фонд оценочных средств для аттестации по дисциплине

#### 6.1 Перечень оценочных средств

1. Балльно - рейтинговая система контроля и оценки академической активности обучающихся КГУ

2. Перечень вопросов к экзамену

3. Банк заданий к рубежным контролям №1,2

4. Контрольная работа

### 6.2 Система балльно - рейтинговой оценки работы обучающихся по дисциплине.

|   | Наименование  | Содержание  |  |   |                               | Промежуточная аттестация |
|---|---|---|--|---|-------------------------------|--------------------------|
| № | Распределение баллов за семестр по видам учебной работы, сроки сдачи учебной работы (доводятся до сведения студентов на первом занятии) | Распределение баллов за 7 семестр   |  |   |                               |                          |
|   |   | Посещение лекционных занятий<br>21x1б=21б   | Работа на практических занятиях до 1 баллов (до 19 баллов) | Рубежный контроль №1<br>Контрольная работа<br>12 б. | Рубежный контроль №2<br>18 б. | экзамен<br>30 баллов     |
|   | Критерий пересчета баллов в традиционную оценку по итогам работы в семестре   | 60 и менее баллов – неудовлетворительно (не зачтено);<br>61... 73 – удовлетворительно (зачтено);<br>74... 90 – хорошо;<br>91...100 – отлично  |  |   |                               |                          |
| 3 | Критерий допуска к промежуточной аттестации по дисциплине (зачет), возможности получения автоматического зачета по дисциплине           | Для допуска к промежуточной аттестации (экзамену) студент должен набрать по итогам текущего и рубежного контроля не менее 50 баллов и должен выполнить все практические работы и контрольную работу.<br>Для получения экзаменационной оценки «автоматически» студенту необходимо набрать за семестр не менее 68 балла (оценка «удовлетворительно»)<br>По согласованию с преподавателем студенту, набравшему минимум 68 баллов, могут быть добавлены дополнительные (бонусные) баллы за активное участие в научной и методической работе, оригинальность принятых решений в ходе выполнения лабораторных работ, за участие в значимых учебных и внеучебных мероприятиях кафедры и выставлена за экзамен «автоматически» оценка «хорошо» или «отлично». |  |   |                               |                          |
| 4 | Формы и виды учебной работы для неуспевающих (восстановившихся на курсе)  | Если обучающийся набрал менее 50 баллов, то необходимо выполнить дополнительное задание (назначаются преподавателем):<br>- выполнение рубежных контролей (если они не выполнялись обучающимся) или работы над ошибками 30 б.<br>- выполнение и защита отчетов по пропущенным практическим занятиям (1б за   |  |   |                               |                          |



|   |  |
|---|--|
| обучения) студентов для получения недостающих баллов в конце семестра | каждое занятие).<br>Ликвидация академической задолженности, возникшей из-за разницы в учебном плане, при переводе и восстановлении проводится путем выполнения дополнительных заданий, форма и объем которых определяется преподавателем |
|---|--|

### 6.3 Процедура оценивания результатов освоения дисциплины.

Рубежные контроли проводятся в виде контрольных работ. На каждый рубеж студенту отводится 90 минут.

Перед проведением рубежного контроля проводятся итоговые занятия по соответствующим разделам, где разбираются примерные задания рубежного контроля.

Экзамен проводится по билетам, в которых один вопрос теоретический (оценивается до 10 баллов) и две задачи (до 10 баллов). Время, отводимое студенту на экзаменационное задание, составляет 1.5 астрономических часа.

Результаты текущего контроля успеваемости заносятся преподавателем в экзаменационную ведомость, которая сдается в организационный отдел института в день экзамена, а также выставляется в зачетную книжку студента

### 6.4 Примеры оценочных средств для рубежных контролей и экзамена

#### Рубеж 1(контрольная работа№1)

1. Найти экстремали функционала

$$а) J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-y^2 + y'^2) dx; y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$в) J[y, z] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 + z'^2 + 2yz) dx, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, z(0) = 0, z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

2. Исследовать функционал на экстремум

$$J[y] = \int_0^1 e^x \left( y^2 + \frac{1}{2} y'^2 \right) dx, y(0) = 1, y(1) = e.$$

#### Рубеж 2(контрольная работа№2)

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом:

$$f(x) = -2x_1 - x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 2x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 - 2x_2 \leq 0, \\ x_1 - x_2 \geq -1, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4 - 2x_5 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5.$$

3. Найти глобальные экстремумы функции условиях:  $F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2$  при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4. Любым градиентным методом первого порядка найти минимум функции:

$$z = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2.$$

## ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

### Вопросы к экзамену по курсу

#### «Вариационное исчисление и методы оптимизации»

1. Функционалы. Примеры функционалов. Основные задачи вариационного исчисления. Решение задачи о брахистохроне.
2. Функциональные пространства. Примеры. Понятия близости кривых, расстояния между кривыми. Непрерывность функционала.
3. Дифференциал функционала. Единственность функционала. Понятие экстремума. Необходимое условие экстремума функционала.
4. Уравнение Эйлера. Некоторые простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.

5. Вариационные задачи для функционалов с закрепленными концами в случае  $n$  неизвестных и зависящих от производных более высокого порядка.
6. Вариационная задача для функционалов, зависящих от функций нескольких переменных.
7. Вариационная задача с подвижными границами для функционала.
8. Вариационная задача с подвижными границами для функционала 
$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx.$$
9. Поле экстремалей. Функционал Вейерштрасса.
10. Поле экстремалей. Достаточные условия Лежандра.
11. Изопериметрическая задача.
12. Задача Лагранжа.
13. Общая формулировка задачи линейного программирования. Различные формы задачи.
14. Идея симплекс-метода. Симплекс-метод в общем случае.
15. Контроль за правильностью составления таблиц.
16. Отыскание первого базиса.
17. Теорема о конечности симплекс-алгоритма.
18. Взаимно-двойственные задачи линейного программирования. Теорема двойственности.
19. Задачи нелинейного программирования. Градиентные методы.

### 6.5. Фонд оценочных средств

Полный банк заданий для текущего, рубежных контролей и промежуточной аттестации по дисциплине, показатели, критерии, шкалы оценивания компетенций, методические материалы, определяющие процедуры оценивания образовательных результатов, приведены в учебно-методическом комплексе дисциплины.

## 7. ОСНОВНАЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

### 7.1 Основная литература

1. Алексеев, В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи [Электронный ресурс]: Учеб. пособие / В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. - 3-е изд., испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. - 256 с. - Доступ из ЭБС «Консультант студента»
2. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления [Электронный ресурс] / В. К. Романко. - 4-е изд. (эл.). - М.: БИНОМ, 2015. - Доступ из ЭБС «Консультант студента»

3. Основы теории управления [Электронный ресурс] / Егоров А.И. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. - Доступ из ЭБС «Консультант студента»

#### 7.2 Дополнительная литература:

1. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах [Электронный ресурс] / Васильева А. Б., Медведев Г. Н., Тихонов Н. А., Уразгильдина Т. А. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - Доступ из ЭБС «Консультант студента»

2. Прикладные задачи оптимизации. Модели, методы, алгоритмы: Практическое пособие / Струченков В.И. - М.: СОЛОН-Пр., 2016. - 314 с. - Доступ из ЭБС «Консультант студента»

### **8. ДЛЯ СТУДЕНТОВ, ОБУЧАЮЩИХСЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСТАНЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

При использовании электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (далее – ЭО и ДОТ), занятия полностью или частично проводятся в режиме онлайн. Объем дисциплины и распределение нагрузки по видам работ соответствует п.4.1. Распределение баллов соответствует п.6.2 либо может быть изменено в соответствии с решением кафедры, в случае перехода на ЭО и ДОТ в процессе обучения. Решение кафедры об используемых технологиях и системе оценивания достижений обучающихся принимается с учетом мнения ведущего преподавателя и доводится до сведения обучающихся.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Аннотация к рабочей программе дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата 01.05.01 «Фундаментальная математика и механика»; направленность: Математическое и программное обеспечение информационных систем

Трудоемкость дисциплины: 7з. е. (252 академических часов)

Семестр 7

Формы промежуточной аттестации: экзамен

### Содержание дисциплины

Элементы дифференциального исчисления и выпуклого анализа; гладкие задачи с равенствами и неравенствами; правило множителей Лагранжа; задачи линейного программирования и проблемы экономики; теорема двойственности; классическое вариационное исчисление; уравнение Эйлера; условие второго порядка Лежандра и Якоби; задачи классического вариационного исчисления с ограничениями; необходимые условия в изопериметрической задаче и задаче со старшими производными; классическое вариационное исчисление и естествознание; оптимальное управление; оптимальное управление и задачи техники; методы решения задач линейного программирования; симплекс-метод; методы решения задач без ограничения; градиентные методы; метод Ньютона; методы сопряженных направлений; численные методы решения задач вариационного исчисления и оптимального управления.