

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Курганский государственный университет»
(КГУ)

Кафедра «Фундаментальной математики»



УТВЕРЖДАЮ:

Первый проректор

/ Т.Р. Змызгова /

«07» сентября 2021 г.

Рабочая программа учебной дисциплины

Случайные процессы

образовательной программы высшего образования –
программы бакалавриата

01.03.01 –Математика

Направленность (профиль):

Математическое и программное обеспечение экономической деятельности


Формы обучения: очная.

Курган 2021

Рабочая программа дисциплины «Случайные процессы» составлена в соответствии с учебным планом по программе бакалавриата – Математика (Математическое и программное обеспечение экономической деятельности), утвержденным :
- для очной формы обучения « 30 » августа 2021 года;


Рабочая программа дисциплины одобрена на заседании кафедры «Фундаментальной математики»
« 6 » сентября 2021 года, протокол № 1

Рабочую программу составил
Старший
преподаватель


 Е.А. Лукерьянова

Согласовано:


Заведующий кафедрой
«Фундаментальной математики»

 М.В. Гаврильчик

Специалист по учебно-методической работе
Учебно-методического отдела

 Г.В. Казанкова

Начальник Управления
образовательной деятельности

 С.Н. Синицын

1. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Всего: 5 зачетных единицы трудоемкости (180 академических часа)

Очная форма обучения

Вид учебной работы	На всю дисциплину	Семестр	
		7	
Аудиторные занятия (контактная работа с преподавателем), всего часов	60	60	
в том числе:			
Лекции			30
Практические занятия	30	30	
Самостоятельная работа, всего часов	120	120	
в том числе:			
Подготовка к экзамен			27
Контрольная работа			18
Другие виды самостоятельной работы			75
Вид промежуточной аттестации	Экзамен	Экзамен	
Общая трудоемкость дисциплины и трудоемкость по семестрам, часов	180	180	

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «случайные процессы» относится к обязательной части учебного блока 1.

Краткое содержание дисциплины:

Случайные функции (процессы); корреляционная теория случайных функций; стационарные случайные функции; процесс Пуассона; Марковские случайные процессы; Винеровские процессы, процесс броуновского движения.

Дисциплина «случайные процессы» базируется на знаниях, умениях, навыках, приобретенных студентами в средней школе. Освоение дисциплины «случайные процессы» опирается также на знания, умения, навыки и компетенции, приобретенные в результате освоения дисциплин:

- математический анализ,
- алгебра,
- вводный курс математики,
- теория вероятностей

Знания, умения и навыки, полученные при освоении дисциплины «случайные процессы», являются необходимыми для освоения последующих дисциплин:

- вариационные исчисления и методы оптимизации,
- страхование и теория рисков
- управление малым бизнесом
- организация и планирование деятельности предприятия
- методы принятия оптимальных решений
- теория массового обслуживания

3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

Целью изучения дисциплины является получение фундаментального образования, способствующего развитию личности.

Задачами дисциплины является изучение основ теории случайных процессов, овладение методами и приемами решения задач теории случайных процессов;

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины:

- Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности (ОПК-1).

- Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении (ОПК-2)

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

Знать:

фундаментальные понятия, законы, формулы теории случайных процессов (ОПК-1, ОПК-2)

Уметь:

Применять полученные знания при изучении других дисциплин, выделять вероятностно-статистическое содержание в задачах профессиональной деятельности (ОПК-1, ОПК-2);

Владеть:

основным понятийным аппаратом (ОПК-1, ОПК-2).

4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Учебно-тематический план

Очная форма обучения

Рубеж	Номер раздела, темы	Наименование раздела, темы	Количество часов контактной работы с преподавателем	
			Лекции	Практич. занятия
Рубеж 1	1	Случайные функции (процессы)	4	4
	2	Корреляционная теория случайных функций	4	4
		Рубеж 1 Контрольная работа		2
Рубеж 2	3	Стационарные случайные функции	6	6
	4	Процесс Пуассона	6	4
	5	Марковские случайные процессы;	6	6
	6	Винеровские процессы	4	2
		Рубеж 2		2
Итого			30	30

4.2. Содержание лекционных занятий

Раздел 1. Случайные функции (процессы)

Тема 1. Понятие случайной функции (процесса)

Случайные процессы в широком смысле: определение случайного процесса, конечномерные распределения; траектории;

Классы случайных процессов, процессы с независимым приращением, марковские процессы, гауссовские процессы, стационарные в узком смысле, стационарные в широком смысле

Тема 2. Теорема Колмогорова

Теорема Колмогорова о существовании процесса с заданным семейством конечномерных распределений

Раздел 2. Корреляционная теория случайных функций

Тема 3. Основные характеристики случайного процесса.

Основные характеристики случайного процесса (математическое ожидание случайного процесса, дисперсия случайного процесса). Корреляционная функция случайного процесса. Взаимная корреляционная функция случайного процесса.

Тема 4. Характеристики суммы случайного процесса.

Характеристики суммы случайного процесса. Математическое ожидание суммы двух и нескольких случайных процессов. Корреляционная функция суммы коррелированных и некоррелированных процессов.

Тема 5. Производная случайного процесса и ее характеристики.

Понятие производной случайного процесса. Математическое ожидание и корреляционная функция производной случайного процесса.

Тема 6. Интеграл случайного процесса и его характеристики.

Понятие интеграла случайного процесса. Математическое ожидание и корреляционная функция интеграла случайного процесса.

Раздел 3. Стационарные случайные функции (процессы)

Тема 7. Стационарный случайный процесс в узком и широком смысле.

Стационарный случайный процесс в узком и широком смысле.

Свойства корреляционной функции стационарного случайного процесса. Стационарно связанные случайные процессы.

Тема 8. Корреляционная и взаимно корреляционная функция производной и интеграла стационарной случайной функции. Взаимная корреляционная функция стационарной случайной функции и ее производной.

Корреляционная функция производной стационарной случайной функции. Свойства корреляционная функция производной стационарной случайной функции. Взаимная корреляционная функция стационарной случайной функции и ее производной. Свойства взаимной корреляционной функции стационарной случайной функции и ее производной. Корреляционная функция интеграла от стационарной случайной функции.

Тема 9. Спектральная теория стационарного случайного процесса.

Линейные и нелинейные преобразования случайных процессов. Спектральное разложение стационарного случайного процесса. Спектральная плотность случайного процесса. Теорема Винера-Хинчина. Стационарный белый шум

Раздел 4. Процесс Пуассона

Тема 10. Распределение Пуассона.

Распределение Пуассона. Простейший поток событий. Свойства потока событий.

Тема 11. Процесс Пуассона.

Построение пуассоновского процесса. Определение Хинчина пуассоновского процесса.

Раздел 5. Марковские случайные процессы

Тема 12. Марковский процесс с дискретным множеством состояний

Однородная цепь Маркова. Переходные вероятности. Матрица перехода. Равенство Маркова. Общее определение марковского процесса. Марковский процесс с дискретным множеством состояний

Тема 13. Марковский процесс с непрерывным множеством состояний

Марковский процесс с непрерывным множеством состояний. Построение марковской цепи по начальному распределению и переходным вероятностям. Пуассоновский процесс как цепь Маркова. Однородные марковские процессы. Эргодическая теорема для цепей Маркова с непрерывным временем.

Раздел 6. Винеровские процессы.

Тема 14. Процесс броуновского движения. Винеровские процессы.

Понятие винеровского процесса. Процесс броуновского движения

4.2 Содержание практических занятий

Номер раздела, темы	Наименование раздела, темы	Наименование практического занятия	Норматив времени, час.
			Очная форма обучения
P1	Случайные функции (процессы)	Понятие случайной функции (процесса)	4
		Теорема Колмогорова.	
P2	Корреляционная теория случайных функций	Основные характеристики случайного процесса. Характеристики суммы случайного процесса. Производная случайного процесса и ее характеристики. Интеграл случайного процесса и его характеристики.	4
		Рубеж 1 Контрольная работа	
P3	Стационарные случайные функции(процессы)	Стационарный случайный процесс в узком и широком смысле.	2

		Корреляционная и взаимно корреляционная функция производной и интеграла стационарной случайной функции.	2
		Спектральная теория стационарного случайного процесса	2
P4	Процесс Пуассона	Распределение Пуассона	2
		Простейший поток событий Процесс Пуассона	2
P5	Марковские случайные процессы	Марковский процесс с дискретным множеством состояний	4
		Марковский процесс с непрерывным множеством состояний	2
P6	Винеровские Процессы	Процесс броуновского движения. Винеровские процессы.	2
		Рубеж 2	2
		Всего	30

4.4. Контрольная работа

Контрольная работа № 1 проводится по 1и 2 разделу.

Цель контрольных работ проверить знания, умения и навыки решения задач, осуществить коррекцию знаний студентов. Контрольная работа 1 содержит 7 задач. Рубеж 2 проводится по разделам 3 и 4. На контрольную работу отводится одна пара.

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

При прослушивании лекций рекомендуется в конспекте отмечать все важные моменты, теоремы и формулы, доказательство теорем, свойств на которых заостряет внимание преподаватель. Перед лекцией необходимо повторить материал, выделить непонятные места в лекции, чтобы обсудить их на занятии.

Преподавателем запланировано применение на лекционных занятиях технологий коллективного взаимодействия, разбора конкретных ситуаций, групповая форма работы студентов на этапе повторения материала.

Практические занятия будут проводиться с использованием различных технологий (индивидуализированного обучения, групповой формы обучения)

Для текущего контроля успеваемости по очной форме обучения преподавателем используется балльно-рейтинговая система контроля и оценки академической активности. Поэтому настоятельно рекомендуется тщательно прорабатывать материал дисциплины при самостоятельной работе, участвовать во всех формах обсуждения и взаимодействия, как на лекциях, так и на практических занятиях в целях лучшего освоения материала и получения высокой оценки по результатам освоения дисциплины.

Выполнение самостоятельной работы подразумевает, подготовку к практическим занятиям, к рубежным контролям 1 - контрольной работе, рубежу 2 и подготовку к экзамену.

Рекомендуемая трудоемкость самостоятельной работы представлена в таблице:

Рекомендуемый режим самостоятельной работы

Наименование вида самостоятельной работы	Рекомендуемая трудоемкость, акад. час.
	Очная форма обучения
Подготовка к контрольной работе(рубеж 1)	18
Подготовка к рубежному контролю 2	16
Подготовка к практическим занятиям (по 2 часа на каждое занятие)	26
Подготовка индивидуальных заданий	33
Подготовка к экзамену	27
Всего:	120

6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

6.1. Перечень оценочных средств

1. Балльно-рейтинговая система контроля и оценки академической активности студентов в КГУ (для очной формы обучения)
2. Банк заданий к рубежным контролям 1,2 (контрольная работам, проверочная самостоятельная работа)
3. Банк заданий к экзамену
4. Перечень вопросов к экзамену.

6.2. Система балльно-рейтинговой оценки работы студентов по дисциплине

№	Наименование	Содержание						
1	Распределение баллов за семестры по видам учебной работы, сроки сдачи учебной работы (доводятся до сведения студентов на первом учебном занятии)	Распределение баллов на 7 семестр						
		Вид УР:	Работа на лекции	Работа на практических занятиях	Рубежный контроль №1 Контрольная работа	Рубежный контроль №2 Проверочная самостоятельная работа	Индивидуальное задание	экзамен
		Балльная оценка:	1	1-2	2-14	2-10	5	30
	Примечания:	15 занятий Максимум 15	13 занятий Максимум 26	На 5-м практическом занятии	На 15-м практическом занятии	В течение семестра		
2	Критерий пересчета баллов в традиционную оценку по итогам работы в семестре	60 и менее баллов – оценка 2 (неудовлетворительно) 61-73 балла – оценка 3 (удовлетворительно) 74-90 балла – оценка 4 (хорошо) 91-100 баллов – оценка 5 (отлично)						

	и экзамена	
3	Критерии допуска к промежуточной аттестации, возможности получения автоматического зачета (экзаменационной оценки) по дисциплине, возможность получения бонусных баллов	<p>Для допуска к промежуточной аттестации (экзамену) студенту необходимо набрать не менее 50 баллов и выполнить все практические работы</p> <p>2. Для получения экзаменационной оценки (экзамена) «автоматически» студенту необходимо набрать за семестр следующее минимальное количество баллов:</p> <ul style="list-style-type: none"> - 68 для получения «автоматически» оценки «удовлетворительно» в 7 семестр <p>По согласованию с преподавателем студенту, набравшему минимум 68 баллов, могут быть добавлены дополнительные (бонусные) баллы за активное участие в работе на занятиях, оригинальность принятых решений в ходе выполнения практических работ и выставлена за экзамен «автоматически» оценка «хорошо» или «отлично»..</p>
4	Формы и виды учебной работы для неуспевающих (восстановившихся на курсе обучения) студентов для получения недостающих баллов в конце семестра	<p>В случае если к промежуточной аттестации набрана сумма менее 50 баллов, студенту необходимо набрать недостающее количество баллов за счет выполнения дополнительных заданий, до конца последней (зачетной) недели семестра. При этом необходимо проработать материал всех пропущенных лекционных и практических занятий.</p> <p>Формы дополнительных заданий (назначаются преподавателем):</p> <ul style="list-style-type: none"> - выполнение и защита отчетов по пропущенным практическим занятиям (1-2 балла); - прохождение рубежного контроля (баллы в зависимости от рубежа). <p>Ликвидация академических задолженностей, возникших из-за разности в учебных планах при переводе или восстановлении, проводится путем выполнения дополнительных заданий, форма и объем которых определяется преподавателем.</p>

6.3. Процедура оценивания результатов освоения дисциплины

Рубежный контроль 1 проводится в форме контрольной работы, рубежный контроль 2 в форме проверочной самостоятельной работы. Экзамен проводится по билетам, которые содержат два вопроса и задачу.

Варианты контрольной для рубежных контроля № 1 состоят из 7 заданий.

На первый и второй рубежи отводится по одной паре. Каждое задание контрольной работы оценивается в 2 балла. Задания самостоятельной работы оцениваются по 2 балла. В течение семестра каждый студент выполняет индивидуальное задание, которое оценивается 5 баллов.

Преподаватель оценивает в баллах результаты каждого студента по количеству правильных ответов и заносит в ведомость учета текущей успеваемости.

Время, отводимое студенту на экзаменационное задание, составляет не менее 30 минут. Каждый вопрос и задача оцениваются в 10 баллов.

Результаты текущего контроля успеваемости и экзамена заносятся преподавателем в экзаменационную ведомость, которая сдается в организационный отдел института в день экзамена, а также выставляются в зачетную книжку студента.

6.4. Примеры оценочных средств для рубежных контролей и экзамена

Контрольная работа №1 (рубеж 1)

1. Случайная функция $x(t) = (t^2 + t - 1)u$, где u – случайная величина, возможные значения которой принадлежат интервалу $(0, 20)$. Найти реализации функции $x(t)$, если $u = 3$. Найти сечение $x(t)$, соответствующее фиксированным значениям аргумента $t = 4$.
2. Найти математическое ожидание случайной функции, дисперсию и корреляционную функцию $x(t) = ut^3 - 6t + 1$, где u – случайная величина, причем $M(u) = 2$, $D(u) = 5$.
3. Доказать, что корреляционная функция произведения трех центрированных функций равна произведению корреляционных функций сомножителей.
4. Найти нормированную взаимную корреляционную функцию $x(t) = tu$ и $y(t) = (t + 2)u$, где $D(u) = 20$.
5. Дано: $X(t)$ - случайная функция, $\varphi(t)$ - неслучайная функция. Доказать: если $Y(t) = X(t)\varphi(t)$, то $D_Y(t) = \varphi^2(t) D_X(t)$.
6. Доказать, что взаимная корреляционная функция случайной функции $X(t)$ и ее производной равна частной производной от корреляционной функции по аргументу, который «соответствует производной» [если индекс x стоит на первом (втором) месте, то надо дифференцировать по первому (второму) аргументу: а) $R_{xx} = \frac{\delta K_x}{\delta t_2}$;

б) $R_{xx} = \frac{\delta K_x}{\delta t_1}$.

7. Сформулировать и доказать свойства корреляционной функции.

Проверочная самостоятельная работа (Рубеж 2)

1. Случайная функция $X(t)$ имеет характеристики $m_x(t) = 0$, $K_x(t, t') = \frac{1}{1 + (t' - t)^2}$. Найти характеристики случайной функции $Y(t) = \int_0^t X(t) dt$. Определить, стационарны ли функции $X(t), Y(t)$.
2. Случайная функция $X(t) = t + V_1 \sin \omega t + V_2 \cos \omega t$, где V_1, V_2 некоррелированные случайные величины с математическим ожиданием, равным нулю и $D_1 = D_2 =$
2. Выяснить является ли стационарной случайной функцией функция $X(t)$.
3. Случайная функция $X(t)$ задана выражением $X(t) = V \cos \omega t$, где V — случайная величина с характеристиками $m_v(t) = 2$, $\tau_v(t) = 3$. Является ли стационарной случайная функция $Y(t) = X(t) + \alpha \frac{dX(t)}{dt}$, α — неслучайная величина?
4. Задана корреляционная функция $k_x(\tau) = 5e^{-0.5\tau^2}$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти: а) корреляционную функцию и дисперсию производной $X'(t) = x$; б) отношение дисперсий функций $X(t)$ и ее производной.
5. Найти дисперсию интеграла $Y(t) = \int_0^t x(s) ds$, зная корреляционную функцию стационарной случайной функции $X(t)$: $k_x(\tau) = \frac{1}{1 + \tau^2}$.

Индивидуальные задания.

Подобрать материал по истории науки (Случайные процессы). Выступить на занятиях с сообщением.

Вопросы к экзамену.

1. Понятие случайной функции, случайного процесса.
2. Сечение случайной функции. Реализация случайной функции.
3. Виды случайных процессов.
4. Математическое ожидание случайного процесса. Свойства математического ожидания.
5. Дисперсия случайного процесса. Свойства дисперсии случайного процесса.
6. Корреляционная функция случайного процесса. Свойства корреляционной функции.

7. Нормированная корреляционная функция случайного процесса.
8. Взаимно корреляционная функция двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$: свойства взаимной корреляционной функции.
9. Коррелированные и некоррелированные случайные процессы.
10. Математическое ожидание суммы конечного числа случайных процессов.
11. Теорема о корреляционной функции суммы двух коррелированных случайных процессов. Следствия из теоремы.
12. Характеристики производной от случайной функции.
13. Характеристика интеграла от случайной функции.
14. Стационарная случайная функция и ее характеристики.
15. Стационарно связанные случайные функции, корреляционная функция производной от стационарной случайной функции.
16. Корреляционная функция интеграла от стационарной случайной функции.
17. Взаимная корреляционная функция дифференцируемой стационарной случайной функции и ее производных.
18. Спектральная плотность стационарной случайной функции.
19. Преобразование стационарной случайной функции стационарной линейной динамической системой.
20. Простейший поток событий. Процесс Пуассона.
21. Цепи Маркова. Марковские случайные процессы.
22. Винеровские случайные процессы.

6.5. Фонд оценочных средств

Полный банк заданий для текущего, рубежных контролей и промежуточной аттестации по дисциплине, показатели, критерии, шкалы оценивания компетенций, методические материалы, определяющие процедуры оценивания образовательных результатов, приведены в учебно-методическом комплексе дисциплины.

7. ОСНОВНАЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

7.1. Основная учебная литература

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшее образование, 2012.-367с.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис – пресс, 2007. – 288 с.
3. Семаков С.Л. Элементы теории вероятностей и случайных процессов.- М.:ФИЗМАТЛИТ,2011. –232с. Доступ из ЭБС (консультант студента).

7.2. Дополнительная учебная литература

1. Вентцель Е.С. Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1975.-247с.
2. Шихеева В.В. Теория случайных процессов: Марковские цепи. –М.: МИСиС,2013. –70с. Доступ из ЭБС (консультант студента).

8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

1. Лукерьянова Е.А. Случайные процессы. //Методические указания к практическим занятиям для студентов специальности 010101Математика». - Курган: Изд-во КГУ, 2011.

9. РЕСУРСЫ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

№	Интернет-ресурс	Краткое описание
1	http:// statsoft.ru /	Статистический портал StatSoft (теория вероятностей, математическая статистика).
2	http:// nsu.ru	Чернова Н.И. Теория вероятностей и мат. статистика.
3	http:// teorver-online.narod.ru - /	Манита А.Д. Теория вероятностей и математическая статистика (МГУ).
4	http:// spbstu.ru	Калинин В.М. Теория вероятностей и математическая статистика.
8	http://en.edu.ru/	Портал является составной частью федерального портала "Российское образование". Содержит ресурсы и ссылки на ресурсы по естественно-научным дисциплинам (физика, математика, химия и биология).
9	http://www.edu.ru/	Федеральный портал «Российское образова/ние».
11	http://www.msu.ru	Сайт Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.

10. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ, ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ

При изучении курса используются офисные программы Microsoft Windows7 Корпоративная или XP, Microsoft Office, Open Office 4.1.3

11. Для студентов, обучающихся с использованием дистанционных образовательных технологий

При использовании электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (далее ЭО и ДОТ) занятия полностью или частично проводятся в режиме онлайн. Объем дисциплины и распределение нагрузки по видам работ соответствует п. 4.1. Распределение баллов соответствует п.6.2 либо может быть изменено в соответствии с решением кафедры, в случае перехода на ЭО и ДОТ в процессе обучения. Решение кафедры об используемых технологиях и системе оценивания достижений обучающихся принимается с учетом мнения ведущего преподавателя и доводится до сведения обучающихся.

Аннотация к рабочей программе дисциплины
Случайные процессы.

образовательной программы высшего образования –
программы бакалавриата
01.03.01 – Математика

Направленность (профиль):

Математическое и программное обеспечение экономической деятельности

Формы обучения: очная

Трудоемкость дисциплины: 53Е (180 академических часа)

Семестр: 7 (очная форма обучения).

Форма промежуточной аттестации: Экзамен

Содержание дисциплины

Случайные функции (процессы); корреляционная теория случайных функций; стационарные случайные функции; процесс Пуассона; Марковские случайные процессы; Винеровские процессы, процесс броуновского движения.