Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Курганский государственный университет»
(КГУ)

Кафедра «Математика и физика»

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по образовательной
и международной деятельности
_____ / Кирсанкин А.А./
«____»_____ 2026 г.

Рабочая программа учебной дисциплины
**Функциональный анализ**
образовательной программы высшего образования –
программы бакалавриата:

**01.03.01 – Математика**

**Направленность**: Математическое и программное обеспечение
вычислительных систем и компьютерных сетей

Формы обучения: очная

Курган 2026

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» составлена в соответствии с учебным планом по программе бакалавриата Математика (Математическое и программное обеспечение вычислительных систем и компьютерных сетей) утвержденными:

- для очной формы обучения «26» июня 2026 года;

Рабочая программа дисциплины одобрена на заседании кафедры «Фундаментальной математики»

«1» сентября 2026 года, протокол № 1

Рабочую программу составил:
доцент, к.ф.-м.н., Т.А. Вержбалович

Согласовано:

Заведующий кафедрой М.В. Гаврильчик
«Фундаментальная математика»

Специалист по учебно-методической Г.В. Казанкова
работе учебно-методического отдела

Начальник управления
Образовательных деятельности И.В. Григоренко

## 1. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Всего: 6 зачетных единиц трудоемкости (216 академических часа)

### Очная форма обучения

| Вид учебной работы | На всю дисциплину | Семестр |
|---|---|---|
| | | 6 |
| **Аудиторные занятия (всего часов), в том числе:** | **78** | **78** |
| Лекции | 30 | 30 |
| Практические занятия | 48 | 48 |
| **Самостоятельная работа (всего часов), в том числе:** | **138** | **138** |
| Контрольные работы | 18 | 18 |
| Подготовка к зачету, экзамену | 27 | 27 |
| Другие виды самостоятельной работы (самостоятельное изучение тем (разделов) дисциплины) | 93 | 93 |
| **Вид промежуточной аттестации:** | экзамен | экзамен |
| **Общая трудоемкость дисциплины и трудоемкость по семестрам в часах:** | **216** | **216** |

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Функциональный анализ» относится к обязательной части учебного блока 1.

*Краткое содержание дисциплины.*

Метрические и топологические пространства, мера и интеграл Лебега; Банаховы и Гильбертовы пространства. Линейные топологические пространства и обобщенные функции.

Данная дисциплина является логическим завершением изучения других дисциплин данного цикла: алгебра, геометрия, математический анализ, численные методы и др.

## 3. ПЛАНИРУЕМЫЕ ОЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

Дисциплина «Функциональный анализ» необходимая дисциплина в формировании математической культуры специалиста.

Для математиков прикладной направленности функциональный анализ является очень важной дисциплиной, дающей наиболее общие методы решения задач из различных отраслей знаний на основе существенного обобщения математических моделей из конкретных наук.

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины:

– способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности; (ОПК-1)

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

**Знать** информацию об метрических и топологических пространствах, интегральных уравнениях, мере и интеграле Лебега, обобщенных функциях, классических задачах вариационного исчисления; (ОПК-1)

**Уметь** находить мощность множеств, решать задачи методом сжимающих отображений, вычислять интегралы Лебега, решать простейшие интегральные уравнения; (ОПК-1)

**Владеть** сведениями о приложениях функционального анализа в конкретных науках. (ОПК-1)

Индикаторы и дескрипторы части соответствующей компетенции формируемой в процессе изучения дисциплины «Функциональный анализ», оцениваются при помощи оценочных средств.

Планируемые результаты обучения по дисциплине «Функциональный анализ», индикаторы достижения компетенций ОПК-1, перечень оценочных средств

| № п/п | Код индикатора достижения компетенции | Наименование индикатора достижения компетенции | Код планируемого результата обучения | Планируемые результаты обучения | Наименование оценочных средств |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ИД-1 ОПК-1 | **Знать:** основные понятия и методы изучаемых разделов; основные сферы их приложения | З (ИД-1 ОПК-1) | **Знает:** основные понятия и методы теории множеств, метрических и нормируемых пространств, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений, в том числе в компьютерном моделировании прикладных задач | Вопросы для сдачи экзамена, задания для текущего контроля |
| 2 | ИД-2 | **Уметь:** применять изученные | У (ИД-2 | **Умеет :** решать задачи | Вопросы для |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | ОПК-1 | теоретические положения к решению разнообразных задач из курса «Функциональный анализ» | ОПК-1) | вычислительного и теоретического характера в области функционального анализа | сдачи экзамена, задания для текущего контроля |
| 3 | ИД-3 ОПК-1 | **Владеть**: математическим аппаратом функционального анализа | В (ИД-3 ОПК-1) | **Владеет**: аналитическими методами исследования метрических и нормируемых пространств | Вопросы для сдачи экзамена, задания для текущего контроля |

# 4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ
## 4.1. Учебно-тематический план

| Рубеж дисциплины | Шифр раздела, темы дисциплины | Наименование раздела, темы дисциплины | Количество часов по видам учебных занятий | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Лекции | Практические занятия | Лабораторные работы |
| ***6 семестр*** | | | | | |
| | ***Р1*** | *Множества. Мера линейных множеств.* | *2* | *8* | |
| *Рубеж 1* | ***Р2*** | *Метрические пространства* | *18* | *20* | |
| | ***Р3*** | *Интеграл Лебега* | *2* | *6* | |
| | ***Р4*** | *Линейные операторы и функционалы* | *2* | *6* | |
| *Рубеж 2* | ***Р5*** | *Линейные интегральные уравнения* | *6* | *8* | |
| | | *Итого:* | *30* | *48* | |

## 4.2. Содержание лекционных занятий

| Шифр раздела, темы дисциплины | Наименование раздела, темы дисциплины | Наименование и содержание (с указанием часов) | Норматив времени, часы |
|---|---|---|---|
| | | ***6 семестр*** | ***30*** |
| ***Р1*** | ***Множества. Мера линейных множеств.*** | Функциональный анализ как самостоятельный раздел математики. Эквивалентные множества. Мощность множества. Счетные множества и их свойства | 1 |
| | | Мощность континуума. Континуум-гипотеза<br>Строение линейных множеств. Канторово совершенное множество. | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | Мера Лебега линейных множеств. Общее понятие аддитивной меры. Лебеговское продолжение меры. | |
| ***Р2*** | ***Метрические пространства*** | Метрические пространства. Открытые и замкнутые множества метрических пространств. | 4 |
| | | Топологические пространства. Компактные множества в метрическом пространстве. Критерий Хаусдорфа. Теорема о стягивающих шарах. | 2 |
| | | Нормированные векторные пространства. Пространства со скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского. Банаховы пространства. Сопряженное пространство, его полнота. | 4 |
| | | Сходимость в метрических пространствах. Полнота метрических пространств. | 2 |
| | | Теорема Банаха о сжимающих отображениях и ее применение к доказательству существования решения интегрального уравнения. | 2 |
| | | Метод итераций решения математических задач. Принцип сжимающих отображений. | 2 |
| | | Функции с ограниченным изменением. Спрямляемость кривых. Теорема Жордана о спрямляемости плоских кривых. Интеграл Стилтьеса, его свойства, вычисление и применение. | 2 |
| ***Р3*** | ***Интеграл Лебега*** | Измеримые функции. Интеграл Лебега, его свойства и вычисление. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. | 1 |
| | | Теорема Радона-Никодима. Прямое произведение мер и теорема Фубини. Пространства L1, Lp (p>1). Неравенства Гельдера и Минковского. | 1 |
| ***Р4*** | ***Линейные операторы и функционалы*** | Линейные операторы в линейных нормированных пространствах и их свойства. Теорема Банаха об обратном операторе. Норма оператора. Сопряженный оператор. Принцип равномерной ограниченности. Обратный оператор. Спектр и резольвента. Понятие об индексе. Теорема Фредгольма. | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | Примеры использования теоремы Фредгольма (задача Штурма-Лиувилля, теория потенциала, индекс дифференциального оператора). | |
| | | Линейные функционалы. Общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала. Обобщенные функции и операции над ними (умножение на гладкую функцию, дифференцирование, замена переменных, преобразование Фурье). Полинормированные пространства | |
| | | Функционал Минковского. Нормируемость и метризуемость. Топологии в сопряженном пространстве. Слабая компактность шара в сопряженном пространстве. Основные пространства гладких функций. | 2 |
| ***5*** | ***Линейные интегральные уравнения***. | Линейные интегральные уравнения. Интегральные операторы. Элементы линейного анализа: слабый и сильный дифференциал нелинейного функционала. | |
| | | Экстремум функционала; классические задачи вариационного исчисления; уравнение Эйлера; вторая вариация; условия Лежандра и Якоби. | 2 |
| | | Ортогональные системы; неравенство Бесселя; базисы и гильбертова размерность; теорема об изоморфизме, ортогональное дополнение; общий вид линейного функционала; самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы; ортопроекторы; спектр эрмитова и унитарного оператора; теорема Гильберта о компактных эрмитовых операторах. | 2 |
| | | Функциональное исчисление; приведение оператора к виду умножения на функцию; спектральная теорема; неограниченные самосопряженные операторы; примеры. | 2 |
| | | | |

## 4.3. Содержание практических занятий

| Шифр раздела, темы дисциплины | Наименование раздела, темы дисциплины | Наименование и содержание (с указанием часов) | Норматив времени, часы. |
|---|---|---|---|
| | | ***6 семестр*** | ***48*** |
| ***Р1*** | ***Множества. Мера линейных множеств.*** | Функциональный анализ как самостоятельный раздел математики. Эквивалентные множества. Мощность множества. Счетные множества и их свойства | 3 |
| | | Мощность континуума. Континуум-гипотеза<br>Строение линейных множеств. Канторово совершенное множество. | 3 |
| | | Мера Лебега линейных множеств. Общее понятие аддитивной меры. Лебеговское продолжение меры. | 2 |
| ***Р2*** | ***Метрические пространства*** | Метрические пространства. Открытые и замкнутые множества метрических пространств. | 4 |
| | | Топологические пространства. Компактные множества в метрическом пространстве. Критерий Хаусдорфа. Теорема о стягивающих шарах. | 4 |
| | | Нормированные векторные пространства. Пространства со скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского. Банаховы пространства. Сопряженное пространство, его полнота. | 4 |
| | | Сходимость в метрических пространствах. Полнота метрических пространств. Теорема Банаха о сжимающих отображениях и ее применение к доказательству существования решения интегрального уравнения. | 4 |
| | | Метод итераций решения математических задач. Принцип сжимающих отображений. | 2 |
| | | ***Рубежный контроль №1*** | 2 |
| ***Р3*** | ***Интеграл Лебега*** | Измеримые функции. Интеграл Лебега, его свойства и вычисление. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. | 4 |
| | | Теорема Радона-Никодима. Прямое произведение мер и теорема Фубини. Пространства L1, Lp (p>1). Неравенства Гельдера и Минковского. | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***Р4*** | ***Линейные операторы и функционалы*** | Линейные операторы в линейных нормированных пространствах и их свойства. Теорема Банаха об обратном операторе. | 2 |
| | | Норма оператора. Сопряженный оператор. Принцип равномерной ограниченности. Обратный оператор. Спектр и резольвента. Понятие об индексе. Теорема Фредгольма. | 2 |
| | | Линейные функционалы. Общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах. | 2 |
| ***Р5*** | ***Линейные интегральные уравнения***. | Линейные интегральные уравнения. Интегральные операторы. Элементы линейного анализа: слабый и сильный дифференциал нелинейного функционала | 2 |
| | | Ортогональные системы; неравенство Бесселя; базисы и гильбертова размерность; теорема об изоморфизме, ортогональное дополнение; общий вид линейного функционала; самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы; ортопроекторы; спектр эрмитова и унитарного оператора; теорема Гильберта о компактных эрмитовых операторах. | 4 |
| | | ***Рубежный контроль № 2*** | 2 |

### 4.4. Контрольная работа

Учебным планом предусмотрено две контрольные работы. Контрольная работа №1 (Рубеж 2) по теме «Метрические и нормированные векторные пространства». Каждая работа носит индивидуальный характер.

## 5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ.

При прослушивании лекций рекомендуется в конспекте отмечать все важные моменты, теоремы и формулы, доказательство теорем, свойств, на которых заостряет внимание преподаватель. Перед лекцией необходимо повторить материал, выделить непонятные места в лекции, чтобы обсудить их на занятии.

Преподавателем запланировано применение на лекционных занятиях технологий коллективного взаимодействия, групповая форма работы обучающихся на этапе повторения материала.

Практические занятия будут проводиться с использованием различных технологий (индивидуализированного обучения, групповой формы обучения)

Для текущего контроля успеваемости по очной форме обучения преподавателем используется балльно-рейтинговая система контроля и оценки академической активности. Поэтому настоятельно рекомендуется тщательно прорабатывать материал дисциплины при самостоятельной работе, участвовать во всех формах обсуждения и взаимодействия, как на лекциях, так и на практических занятиях в целях лучшего освоения материала и получения высокой оценки по результатам освоения дисциплины.

Выполнение самостоятельной работы подразумевает самостоятельное изучение разделов дисциплины, подготовку к практическим занятиям, к рубежным контролям, выполнению контрольных работ, подготовку к экзамену.

Рекомендуемая трудоемкость самостоятельной работы представлена в таблице:

**Рекомендуемый режим самостоятельной работы**
**Очная форма обучения**

| Шифр СРС | Виды самостоятельной работы студентов (СРС) | Трудоемкость, часы |
|---|---|---|
| С1 | Самостоятельное или углублённое изучение разделов, тем дисциплины курса: Линейные интегральные уравнения. Интегральные операторы. Элементы линейного анализа: слабый и сильный дифференциал нелинейного функционала; экстремум функционала; классические задачи вариационного исчисления; уравнение Эйлера; вторая вариация; условия Лежандра и Якоби. Ортогональные системы; неравенство Бесселя; базисы и гильбертова размерность; теорема об изоморфизме, ортогональное дополнение; общий вид линейного функционала; самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы; | 41 |
| С2 | Подготовка к аудиторным занятиям (по 2 ч. на каждое практическое занятие) | 44 |
| С3 | Подготовка к рубежному контролю (по 4 ч. на каждый рубеж) | 8 |
| С4 | Выполнение типового расчета | |
| С5 | Контрольная работа | 18 |
| С6 | Подготовка к экзамену | 27 |
| Итого: | | **138** |

## 6. Фонд оценочных средств для аттестации по дисциплине

### 6.1. Перечень оценочных средств

*1. Балльно-рейтинговая система контроля и оценки академической активности обучающихся в КГУ (для очной формы обучения)*

*2. Перечень вопросов к экзамену.*

*3. Задания для рубежного контроля №1.*

*4. Контрольная работа (рубежный контроль №2).*

### 6.2. Система балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся по дисциплине

| № | Наименование | Содержание |
|---|---|---|
| **Очная форма обучения** | | |

<table>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="4">Распределение баллов за семестры по видам учебной работы, сроки сдачи учебной работы (доводятся до сведения обучающихся на первом учебном занятии)</td><td colspan="6">Распределение баллов</td></tr>
<tr><td>Вид учебной работы:</td><td>Посещение лекций</td><td>Выполнение и защита отчетов по практическим работам</td><td>Рубежный контроль №1</td><td>Рубежный контроль №2</td><td>Экзамен</td></tr>
<tr><td>Балльная оценка:</td><td>До 15</td><td>До 15</td><td>До 20</td><td>До 20</td><td>До 30</td></tr>
<tr><td>Примечания:</td><td>15 лекций по 1 баллу</td><td>15 практических занятий по 1 баллу</td><td>На 14-практическом занятии, В случае несвоевременной сдачи контрольной работы, она оценивается от 0 до 17 баллов (в случае сдачи на одну неделю позже установленного срока) и от 0 до 11 баллов (в случае сдачи на две недели позже установленного срока).</td><td>На 14 неделе. В случае несвоевременной сдачи домашней контрольной работы, она оценивается от 0 до 17 баллов (в случае сдачи на одну неделю позже установленного срока) и от 0 до 11 баллов (в случае сдачи на две недели позже установленного срока).</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>Критерий пересчета баллов в традиционную оценку по итогам работы в семестре и зачета</td><td colspan="5">60 и менее баллов – неудовлетворительно;<br>61…73 – удовлетворительно;<br>74… 90 – хорошо;<br>91…100 – отлично</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| 3 | Критерии допуска к промежуточной аттестации, возможности получения автоматического зачета (экзаменационной оценки) по дисциплине, возможность получения бонусных баллов | Для допуска к промежуточной аттестации по дисциплине за семестр обучающийся должен набрать по итогам текущего и рубежного контролей не менее 51 балла. В случае если обучающийся набрал менее 51 балла, то к аттестационным испытаниям он не допускается.<br>Для получения экзамена или зачета без проведения процедуры промежуточной аттестации обучающемуся необходимо набрать в ходе текущего и рубежных контролей не менее 61 балла. В этом случае итог балльной оценки, получаемой обучающимся, определяется по количеству баллов, набранных им в ходе текущего и рубежных контролей. При этом, на усмотрение преподавателя, балльная оценка обучающегося может быть повышена за счет получения дополнительных баллов за академическую активность.<br>Обучающийся, имеющий право на получение оценки без проведения процедуры промежуточной аттестации, может повысить ее путем сдачи аттестационного испытания. В случае получения обучающимся на аттестационном испытании 0 баллов итог балльной оценки по дисциплине не снижается.<br>За академическую активность в ходе освоения дисциплины, участие в учебной, научно-исследовательской, спортивной, культурно-творческой и общественной деятельности обучающемуся могут быть начислены дополнительные баллы. Максимальное количество дополнительных баллов за академическую активность составляет 30.<br>Основанием для получения дополнительных баллов являются:<br>- выполнение дополнительных заданий по дисциплине; дополнительные баллы начисляются преподавателем;<br>- участие в течение семестра в учебной, научно-исследовательской, спортивной, культурно-творческой и общественной деятельности КГУ. |
| 4 | Формы и виды учебной работы для неуспевающих (восстановившихся на курсе обучения) обучающихся для получения недостающих баллов в конце семестра | В случае если к промежуточной аттестации (экзамену) набрана сумма менее 51 балла, обучающемуся необходимо набрать недостающее количество баллов за счет выполнения дополнительных заданий, до конца последней (зачетной) недели семестра.<br>Ликвидация академических задолженностей, возникших из-за разности в учебных планах при переводе или восстановлении, проводится путем выполнения дополнительных заданий, форма и объем которых определяется преподавателем. |

### 6.3. Процедура оценивания результатов освоения дисциплины

Рубежные контроли проводятся в форме контрольных работ и самостоятельных письменных работ (3-4 заданий до 4 баллов каждое).

На каждый рубеж обучающемуся отводится время не менее 90 минут.

Преподаватель оценивает в баллах результаты каждого обучающегося по количеству правильных ответов и заносит в ведомость учета текущей успеваемости.

Экзамен проводится по билетам, в которых один вопрос теоретический (оценивается до 10 баллов) и две задачи (до 10 баллов за каждую). Время, отводимое обучающемуся на экзаменационное задание, составляет 1.5 астрономических часа.

Результаты текущего контроля успеваемости и экзамена заносятся преподавателем в экзаменационную ведомость, которая сдается в организационный отдел института в день экзамена, а также выставляются в зачетную книжку обучающегося.

### 6.4. Примеры оценочных средств для рубежных контролей и экзамена

***Рубеж 1***

1. Построить на отрезке [0,1] нигде не плотное совершенное множество, линейная мера которого равна 0,9.

2 Можно ли построить на отрезке [0,1] совершенное нигде не плотное множество меры 1?

3. Доказать, что любое ограниченное измеримое множество E на прямой, имеющее положительную линейную меру p, содержит измеримое подмножество $E_1$,меры q, где q – произвольно заданное положительное число, меньшее, чем p.

4. Доказать, что всякое измеримое множество E, положительной меры, имеет мощность континуума.

5. Может ли равняться нулю мера множества, содержащего хотя бы одну внутреннюю точку?

6. Можно ли на отрезке [a,b] построить замкнутое множество линейной меры b-a, отличное от самого отрезка?

7. Доказать, что всякое непустое замкнутое множество нигде не плотно, если оно имеет меру нуль.

8. Являются ли метриками на прямой следующие функции:

а) $\rho(x,y) = |x^3 - y^3|$,

б) $\rho(x,y) = |x^2 - y^2|$,

в) $\rho(x,y) = (x^2 + 2y^2)|x - y|$?

9. На множествеM={a,b,c} задана метрика $\rho$такая, что $\rho(a,b) = \rho(b,c) = 1$. Какие значения может принимать$\rho(a,c)$?

10. На окружности можно (проверьте это!) ввести две метрики – расстояние$r(A,B)$по хорде и расстояние $\rho(A,B)$по дуге. Как выражается одна метрика через другую?

11. Задает ли метрику на пространстве многочленов формула $\rho(P_1,P_2) = |P_1(0) - P_2(0)|$?

12. Пусть $M_n$– множество всевозможных n-буквенных слов из русского алфавита. Назовем расстоянием между словами x и уколичество позиций, на которых у словхи устоят разные буквы. Докажите, что $M_n$ – метрическое пространство.

13. Образует ли метрическое пространство множество точек плоскости, если определить расстояние между точками $M(x_1, y_1)$и $N(x_2, y_2)$формулой

$\rho(M,N) = \left(\sqrt{|x_1 - x_2|} + \sqrt{y_1 - y_2}\right)^2$?

***Рубеж 2***

1. Сходится ли последовательность $A_n\left(\frac{n+2}{n^2}, \frac{(-1)^n}{n}\right)$ в соответствующей метрике?

2. Проверьте, сходится ли последовательность функций $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$к функции $f(x) \equiv 0$в пространстве: а) $C[0,1]$; б) $C_1[0,1]$.

3. Покажите, что последовательность функций $f_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$сходится в пространстве $D_1[0,1]$к функции $f(x) \equiv 0$.

4. Проверьте, сходится ли последовательность $f_n(x) = xe^{-nx}$к функции $f(x) \equiv 0$ по метрике пространстваа) $C[0,10]$; б) $C_1[0,10]$.

7. Является ли сжимающим отображение $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$промежутка $[3; +\infty)$в себя?

9. Покажите, что функция $f(x) = \sqrt[3]{1000 - x}$отображает отрезок [9;10] в себя. Сжимающее ли это отображение?

10. Вариация функции$f(x)$на [a,b] равна A. Чему равна вариация функции $kf(x) + m$на [a,b]?

11. Чему равна вариация функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0, \\ 1 - x, & \text{при } 0 < x < 1, \\ 5, & \text{при } x = 1 \end{cases}$$

на отрезке [0,1]?

12. Чему равна вариация функции

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{при } x < 1, \\ 10, & \text{при } x = 1, \\ x^2, & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

на отрезке [0,2]?

13. Как изменить значение функции из предыдущей задачи в точке разрыва (x=1), чтобы вариация функции стала наименьшей?

14. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при\ x = 0, \\ x^2 \cdot \cos\dfrac{\pi}{x}, & при\ x \neq 0, \end{cases}$$

имеет ограниченную вариацию на отрезке [0,1].

15. Вычислить $(s)\int_{-1}^{1} x^4 dg$, если

$$g(x) = \begin{cases} x - 2, & при -1 \leq x < 0, \\ 10, & при\ x = 0 \\ x^6, & при\ x > 0. \end{cases}$$

16. Вычислить $(s)\int_{-2}^{2}(x^3 + x + 1)dg$, если

$$g(x) = \begin{cases} 1, & при\ x = -2, \\ x + 2, & при\ x \in (-2,0), \\ 4, & при\ x = 0, \\ x^2 + 2, & при\ x > 0. \end{cases}$$

### *Вопросы к экзамену (6 семестр)*

1. Эквивалентные множества. Мощность множеств. Счетные множества. Существование различных мощностей.
2. Мощность континуума. Несчетность [0;1].
3. Строение линейных множеств.
4. Мера Лебега линейных множеств.
5. Метрические пространства.
6. Нормированные векторные пространства.
7. Сходимость последовательностей в метрических пространствах.
8. Полные метрические пространства. Банаховы пространства.
9. Теорема Банаха о сжимающих отображениях.
10. Приложение теоремы Банаха к решению интегральных уравнений.
11. Функции с ограниченным изменением. Классы функций с ограниченным изменением.
12. Свойства функций с ограниченным изменением. Критерии для функций с ограниченным изменением.
13. Спрямляемые непрерывные кривые.
14. Определение интеграла Стилтьеса и его свойства.
15. Вычисление интеграла Стилтьеса.
16. Измеримые функции и их свойства.
17. Определение интеграла Лебега.

18.Свойства интеграла Лебега и его вычисление.
19.Обобщенные функции и действия над ними.
20. Дифференцируемость обобщенных функций.
21. Достаточность запаса основных функций для множества обобщенных функций.
22. Линейные операторы в линейных нормированных пространствах.
23. Свойство непрерывности линейного оператора.
24. Ограниченность линейного оператора. Связь непрерывности и ограниченности линейного оператора. Норма оператора.
25. Линейные функционалы. Общий вид линейного функционала в $R^n$.
26. Понятия об интегральных уравнениях и их классификации.

### 6.5 Фонд оценочных средств

Полный банк заданий для текущего, рубежных контролей и промежуточной аттестации по дисциплине, показатели, критерии, шкалы оценивания компетенций, методические материалы, определяющие процедуры оценивания образовательных результатов, приведены в учебно-методическом комплексе дисциплины.

## 7. ОСНОВНАЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

### 7.1. Основная учебная литература


1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – Издательство: М. – Физматлит, 2019 г.
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. -М.: Высшая школа, 1982.
4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - М.: Наука, 1974.


### 7.2. Дополнительная литература


1. Вержбалович Т.А. Элементы функционального анализа [Электронный ресурс]: учебное пособие / Т.А. Вержбалович, Ю.С. Малышева ; Министерство образования Российской Федерации, Курганский государственный университет. - Электрон. текстовые дан. (тип файла: pdf ; размер: 2,48 Mb). - Курган : Издательство Курганского государственного университета, 2015. - 64, [2] с.: ил. - Библиогр.: с. 63. - ISBN 978-5-4217-0303-7. http://dspace.kgsu.ru/xmlui/handle/123456789/4161
2. Вержбалович Т.А., Малышева Ю.С. Элементы функционального анализа: учебное пособие. – Курган : Изд-во Курганского гос. ун-та, 2015. – 65 с.
3. Вулих Б.З. Краткий курс теории вещественной переменной. - М.: Наука, 1973.
4. Нуятов А.А. Практикум по функциональному анализу. Нижний Новгород, 2016.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. - М.: Наука, 1970.

## 8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

## 9.РЕСУРСЫ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

| | Интернет-ресурс | Краткое описание |
|---|---|---|
| | http://en.edu.ru/ | Портал является составной частью федерального портала "Российское образование". Содержит ресурсы и ссылки на ресурсы по естественно-научным дисциплинам (физика, математика, химия и биология). |
| | http://www.edu.ru/ | Федеральный портал «Российское образование» |
| | http://www.msu.ru | Сайт Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова |

## 10. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ, ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ

1. ЭБС «Лань»
2. ЭБС «Консультант студента»
3. ЭБС «Znanium.com»
4. «Гарант» - справочно-правовая система

## 11. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Материально-техническое обеспечение по реализации дисциплины осуществляется в соответствии с требования ФГОС ВО по данной образовательной программе.

## 12. ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСТАНЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

При использовании электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (далее ЭО и ДОТ) занятия полностью или частично проводятся в режиме онлайн. Объем дисциплины и распределение нагрузки по видам работ соответствует п. 4.1. Распределение баллов соответствует п. 6.2 либо может быть изменено в соответствии с решением кафедры, в случае перехода на ЭО и ДОТ в процессе обучения. Решение кафедры об используемых технологиях и системе оценивания достижений обучающихся принимается с учетом мнения ведущего преподавателя и доводится до обучающихся.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Аннотация к рабочей программе дисциплины

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

образовательной программы высшего образования –
программы бакалавриата

**01.03.01 – Математика**

Направленность:

**Математическое и программное обеспечение вычислительных систем и компьютерных сетей**

Формы обучения: очная

Трудоемкость дисциплины: 6 з е (216 академических часа)
Семестр: 6.
Форма промежуточной аттестации: экзамен

Содержание дисциплины

Метрические и топологические пространства, мера и интеграл Лебега; Банаховы и Гильбертовы пространства. Линейные топологические пространства и обобщенные функции.

**ЛИСТ**
**регистрации изменений (дополнений) в рабочую программу учебной дисциплины**
**«Функциональный анализ»**

**Изменения / дополнения в рабочую программу**
**на 20___ / 20___ учебный год:**

_____
_____
_____
_____
_____
_____

Ответственный преподаватель _____ / Ф.И.О. /

Изменения утверждены на заседании кафедры «___»_____20___ г.,
Протокол № ___

Заведующий кафедрой _____ «___»_____20___ г.

**Изменения / дополнения в рабочую программу**
**на 20___ / 20___ учебный год:**

_____
_____
_____
_____
_____
_____

Ответственный преподаватель _____ / Ф.И.О. /

Изменения утверждены на заседании кафедры «___»_____20___ г.,
Протокол № ___

Заведующий кафедрой _____ «___»_____20___ г.