Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Курганский государственный университет»

Кафедра «Математика и физика»

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной и

международной деятельности

_____/А.А.Кирсанкин/

« ___ »_____2026 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

«Вариационное исчисление и методы оптимизации»

образовательной программы высшего

образования – программы бакалавриата 01.03.01 «Математика»
направленность: Математическое и программное обеспечение
экономической деятельности

Формы обучения: очная

Курган 2026г.

Рабочая программа дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» составлена в соответствии с учебным планом по программе бакалавриата Математика (Математическое и программное обеспечение экономической деятельности) утвержденным:

-для очной формы обучения 26.06.2026 г.

Рабочая программа дисциплины одобрена на заседании кафедры «Математика и физика» «01» сентября 2026 года, протокол № 1

Рабочую программу составил

Заведующий кафедрой М.В. Гаврильчик.

«Математика и физика»

Согласовано:

Специалист по учебно-методической Г.В. Казанкова

работе учебно-методического отдела

Начальник управления И.В. Григоренко

образовательной деятельности

1.ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

всего: 6 зачетных единицы (216 академических часа)

Вид учебной работы	На всю дисциплину	семестр
		7
Аудиторные занятия (контактная работа с преподавателем), всего часов	**88**	**88**
Лекционные	44	44
Практические занятия	44	44
Самостоятельная работа, всего часов, в том числе:	**128**	**128**
Подготовка к экзамену	27	27
Контрольная работа	18	18
Другие виды самостоятельной работы	83	83
Вид промежуточной аттестации	экзамен	экзамен
Общая трудоемкость дисциплины, часов	**216**	**216**

2.МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Вариационное исчисление и методы оптимизации» входит в Блок 1(обязательная дисциплина), соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата 01.03.01 «Математика». Изучение вариационного исчисления и методов оптимизации, как одной из физико-математических дисциплин играет важную роль в подготовке специалистов по математическим направлениям.

Этот курс призван усилить прикладную направленность подготовки специалиста-математика. Он позволяет специалистам выработать у них необходимые знания для решения сложных естественнонаучных, экономических задач, в которых требуется выбор оптимальных параметров.

При изложении курса активно используются такие дисциплины как математический анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных.

3.ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

Целью изучения дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» является научное обоснование основных понятий, систематическое изложение основных разделов вариационного исчисления и методов решения задач оптимального управления, привитие навыков математического моделирования и использования моделей реальных процессов для нахождения решений прикладных задач.

Задачи курса: ознакомление обучающихся с ролью и местом теории вариационного исчисления и методов оптимизации в системе математических и других наук; ознакомление с методологией построения математических моделей реальных процессов.

При изложении курса активно используются такие дисциплины как математический анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных.

Процесс изучения дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» направлен на формирование следующей общепрофессиональной компетенции: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности (ОПК -1).

Индикаторы и дескрипторы части соответствующей компетенции, формируемой в процессе изучения дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации», оцениваются при помощи оценочных средств.

Планируемые результаты обучения по дисциплине «Вариационное исчисление и методы оптимизации», индикаторы достижения компетенций ОПК-1, перечень оценочных средств

№ п/п	Код индикатора достижения компетенции	Наименование индикатора достижения компетенции	Код планируемого результата обучения	Планируемые результаты обучения	Наименование оценочных средств
1.	ИД-1 $_{ОПК-1}$	Знать: основные понятия и методы решения типовых задач	З (ИД-1 $_{ОПК-1}$)	Знает: определения и свойства основных понятий, используемых в данной области, методы решения задач, возможные сферы их приложений	Вопросы для сдачи экзамена
2.	ИД-2$_{ОПК-1}$	Уметь: использовать полученные знания для решения прикладных задач	У (ИД-2 $_{ОПК-1}$)	Умеет: решать основные типы задач	Задания рубежных контролей, вопросы для сдачи экзамена
3.	ИД-3$_{ОПК-1}$	Владеть: математическим аппаратом дисциплины, основными понятиями, приемами решения задач	В (ИД-3 $_{ОПК-1}$)	Владеет: основными понятиями, приемами решения задач	Вопросы для сдачи экзамена

4.СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Учебно-тематический план

Рубежный контроль	**Номер раздела, темы**	**Наименование раздела, темы**	**Количество часов контактной работы с преподавателем**	
			Лекции	**Практич. занятия**
Рубеж 1	1	Элементы дифференциального исчисления и выпуклого анализа.	2	0
	2	Классическое вариационное исчисление. Исторические сведения. Основные понятия.	2	2
	3	Вариационная задача с неподвижными концами.	4	2
	4	Задача с подвижными концами	4	4
	5	Достаточные условия экстремума	4	4

	6	Задачи классического вариационного исчисления с ограничениями. Необходимые условия в изопериметрической задаче и задаче Лагранжа.	4	4
	7	Численные методы решения задач вариационного исчисления	6	4
	Рубежный контроль №1 Контрольная работа			2
Рубеж 2	8	Оптимальное управление и задачи техники. Задачи линейного программирования и проблемы экономики	8	10
	9	Численные методы решения задач оптимального управления.	10	10
	Рубежный контроль №2			2
		Всего:	44	44

4.2 Содержание лекционных и практических занятий.

Раздел 1. Элементы дифференциального исчисления и выпуклого анализа.

Гладкие задачи с равенствами и неравенствами. Правило множителей Лагранжа.

Раздел 2. Классическое вариационное исчисление. Исторические сведения. Основные понятия.

Понятие функционала, непрерывный и линейный функционалы. Вариация функционала. Необходимое условие экстремума функционала. Определения сильного и слабого экстремума

Раздел 3. Вариационная задача с неподвижными концами. Уравнение Эйлера. Решение задач о брахистохроне, о наименьшей поверхности вращения. Задача с закрепленными концами в случае n неизвестных функций. Необходимое условие в задаче со старшими производными. Уравнение Эйлера – Пуассона. Уравнение Эйлера- Остроградского. Задача о поверхности наименьшей площади, натянутой на заданную кривую

Раздел 4. Простейшая задача с подвижными концами

Простейшая задача с подвижными концами. Задача с подвижными границами для функционалов вида $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx.$

Раздел 5. Достаточные условия экстремума. Условие Вейерштрасса. Условия второго порядка Лежандра и Якоби.

Раздел 6. Задачи классического вариационного исчисления с ограничениями. Необходимые условия в изопериметрической задаче и задаче Лагранжа.

Раздел 7. Численные методы решения задач вариационного исчисления.

Раздел 8. Оптимальное управление и задачи техники. Задачи линейного программирования и проблемы экономики.

Методы решения задач линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования. Графическое решение этих задач. Симплекс – метод. Взаимно двойственные задачи. Теорема двойственности. Двойственный симплекс- метод.

Раздел 9. Численные методы решения задач оптимального управления.

Градиентные методы. Методы сопряженных направлений, метод Ньютона.

4.3 Контрольная работа

Учебным планом предусмотрена1 контрольная работа.

Цель контрольной работы: проверить знания, умения и навыки обучающихся в решении задач.

Текст контрольной работы приведен в методических указаниях и в разделе 6.4

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО УСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Приступая к изучению дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации», необходимо повторить: основные понятия курсов «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения» и «Уравнения с частными производными».

Для успешного освоения курса «Вариационное исчисление и методы оптимизации», обязательно посещение лекций и практических занятий, регулярное конспектирование материала всех лекций и участие в обсуждении решения задач на практических занятиях.

При подготовке к практическим занятиям необходимо проработать теоретический материал, выполнить задания для самостоятельного решения по теме предыдущего занятия; после этого изучить теоретический материал очередного практического занятия. Подготовка нужна не только к практическим занятиям, но и к лекциям. Перед очередной лекцией необходимо повторить материал предыдущих лекций, так как материал новой лекции часто опирается на уже известный материал.

Систематическая подготовка к аудиторным занятиям и активное участие в рассмотрении вопросов, как на практических занятиях, так и на лекциях является залогом успешного прохождения рубежных контролей и промежуточных аттестаций по дисциплине «Вариационное исчисление и методы оптимизации».

Для текущего контроля успеваемости используется балльно-рейтинговая система контроля и оценки активности обучающихся, что

способствует лучшему освоению материала и получению высокой оценки по результатам освоения дисциплины.

Выполнение самостоятельной работы подразумевает самостоятельное изучение разделов дисциплины, подготовку к практическим занятиям и рубежным контролям, выполнение контрольных работ, подготовку к экзамену.

Рекомендуемый режим самостоятельной работы.

Наименование вида самостоятельной работы	Рекомендуемая трудоемкость, акад.час
1.Углубленное изучение тем -достаточные условия экстремума функционала -теория оптимального управления -численные методы решения задач оптимального управления 2.Подготовка к практическим занятиям(по 1 часу на каждое занятие) 3.Подготовка к контрольной работе 4.Подготовка к экзамену 5. Подготовка к рубежным контролям(по 2 ч.на каждый рубеж)	57 20 17 20 22 18 27 4
Итого	128

6. Фонд оценочных средств для аттестации по дисциплине

6.1 Перечень оценочных средств

1.Балльно - рейтинговая система контроля и оценки академической активности обучающихся КГУ

2.Перечень вопросов к экзамену

3.Банк заданий к рубежным контролям №1,2

4.Контрольная работа

6.2 Система балльно - рейтинговой оценки работы обучающихся по дисциплине.

№	Наименование	Содержание			Промежуточная аттестация
1	Распределение баллов за семестр по видам учебной работы, сроки сдачи учебной работы(доводятся до сведения обучающихся на первом занятии)	Распределение баллов за 7 семестр			
		Посещение лекционных занятий 22х0,5б=11б	Работа на практических занятиях до 2 баллов (до 20баллов)	Рубежный контроль (контрольная работа) №1 20б Рубежный контроль №2 19б	экзамен 30 баллов

2	Критерий пересчета баллов в традиционную оценку по итогам работы в семестре	60 и менее баллов – неудовлетворительно (не зачтено); 61…73 – удовлетворительно (зачтено); 74… 90 – хорошо; 91…100 – отлично			
3	Критерий допуска к промежуточной аттестации по дисциплине (зачет),возможности получения автоматического зачета по дисциплине	Для допуска к промежуточной аттестации по дисциплине за семестр обучающийся должен набрать по итогам текущего и рубежного контролей не менее 51 балла. В случае если обучающийся набрал менее 51 балла, то к аттестационным испытаниям он не допускается. Для получения экзамена без проведения процедуры промежуточной аттестации обучающемуся необходимо набрать в ходе текущего и рубежных контролей не менее 61 балла. В этом случае итог балльной оценки, получаемой обучающимся, определяется по количеству баллов, набранных им в ходе текущего и рубежных контролей. При этом, на усмотрение преподавателя, балльная оценка обучающегося может быть повышена за счет получения дополнительных баллов за академическую активность. Обучающийся, имеющий право на получение оценки без проведения процедуры промежуточной аттестации, может повысить ее путем сдачи аттестационного испытания. В случае получения обучающимся на аттестационном испытании 0 баллов итог балльной оценки по дисциплине не снижается. За академическую активность в ходе освоения дисциплины, участие в учебной, научно-исследовательской, спортивной, культурно-творческой и общественной деятельности обучающемуся могут быть начислены дополнительные баллы. Максимальное количество дополнительных баллов за академическую активность составляет 30. Основанием для получения дополнительных баллов являются: - выполнение дополнительных заданий по дисциплине; дополнительные баллы начисляются преподавателем; - участие в течение семестра в учебной, научно-исследовательской, спортивной, культурно-творческой и общественной деятельности КГУ.		
4	Формы и виды учебной работы для неуспевающих (восстановившихся на курсе обучения) обучающихся для получения недостающих баллов в конце семестра	В случае если к промежуточной аттестации (экзамену) набрана сумма менее 51 балла, обучающемуся необходимо набрать недостающее количество баллов за счет выполнения дополнительных заданий, до конца последней (зачетной) недели семестра. Ликвидация академических задолженностей, возникших из-за разности в учебных планах при переводе или восстановлении, проводится путем выполнения дополнительных заданий, форма и объем которых определяется преподавателем			

6.3 Процедура оценивания результатов освоения дисциплины.

Рубежные контроли проводятся в виде контрольных работ. На каждый рубеж обучающемуся отводится 90 минут.

Перед проведением рубежного контроля проводятся итоговые занятия по соответствующим разделам, где разбираются примерные задания рубежного контроля.

Экзамен проводится по билетам, в которых один вопрос теоретический (оценивается до 10 баллов) и две задачи (до 10 баллов). Время, отводимое обучающемуся на экзаменационное задание, составляет 1.5 астрономических часа.

Результаты текущего контроля успеваемости заносятся преподавателем в экзаменационную ведомость, которая сдается в организационный отдел института в день экзамена, а также выставляется в зачетную книжку обучающегося

6.4 Примеры оценочных средств для рубежных контролей и экзамена

Рубеж 1(контрольная работа№1)

1. Найти экстремали функционала

а) $J[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(-y^2+y'^2)dx;\ y(0)=1, y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

в) $J[y,z]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2+z'^2+2yz)dx$, y(0)=0, y($\frac{\pi}{2}$)=1, z(0)=0, z($\frac{\pi}{2}$)=-1.

2. Исследовать функционал на экстремум

$J[y]=\int\limits_0^1 e^x\left(y^2+\frac{1}{2}y'^2\right)dx,\ y(0)=1,\ y(1)=e.$

Рубеж 2(контрольная работа№2)

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом:

$$f(x) = -2x_1 - x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4 - 2x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, 5.$$

3.Найти глобальные экстремумы функции условиях: $F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

4. Любым градиентным методом первого порядка найти минимум функции:

$$z = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2.$$

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

Вопросы к экзамену по курсу

«Вариационное исчисление и методы оптимизации»

1. Функционалы. Примеры функционалов. Основные задачи вариационного исчисления. Решение задачи о брахистохроне.
2. Функциональные пространства. Примеры. Понятия близости кривых, расстояния между кривыми. Непрерывность функционала.
3. Дифференциал функционала. Единственность функционала. Понятие экстремума. Необходимое условие экстремума функционала.
4. Уравнение Эйлера. Некоторые простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.
5. Вариационные задачи для функционалов с закрепленными концами в случае n неизвестных и зависящих от производных более высокого порядка.
6. Вариационная задача для функционалов, зависящих от функций нескольких переменных.
7. Вариационная задача с подвижными границами для функционала.
8. Вариационная задача с подвижными границами для функционала $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx.$
9. Поле экстремалей. Функционал Вейерштрасса.
10. Поле экстремалей. Достаточные условия Лежандра.
11. Изопериметрическая задача.
12. Задача Лагранжа.
13. Общая формулировка задачи линейного программирования. Различные формы задачи.
14. Идея симплекс-метода. Симплекс-метод в общем случае.
15. Контроль за правильностью составления таблиц.
16. Отыскание первого базиса.
17. Теорема о конечности симплекс- алгоритма.
18. Взаимно- двойственные задачи линейного программирования. Теорема двойственности.
19. Задачи нелинейного программирования. Градиентные методы.

7.ОСНОВНАЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

7.1 Основная литература

1.Алексеев, В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи [Электронный ресурс]: Учеб. пособие / В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. - 3-е изд., испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. - 256 с. -Доступ из ЭБС «Консультант студента»
2.Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления [Электронный ресурс] / В. К. Романко. - 4-е изд. (эл.). - М.: БИНОМ, 2015. - Доступ из ЭБС «Консультант студента»
3.Основы теории управления [Электронный ресурс] / Егоров А.И. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. -Доступ из ЭБС «Консультант студента»

7.2 Дополнительная литература:

1.Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах [Электронный ресурс] / Васильева А. Б., Медведев Г. Н., Тихонов Н. А., Уразгильдина Т. А. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003-Доступ из ЭБС «Консультант студента»
2.Прикладные задачи оптимизации. Модели, методы, алгоритмы: Практическое пособие / Струченков В.И. - М.: СОЛОН-Пр., 2016. - 314 с.- Доступ из ЭБС «Консультант студента»

8. РЕСУРСЫ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ» ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

№	Интернет-ресурс	Краткое описание
1	http://en.edu.ru/	Портал является составной частью федерального портала "Российское образование".
2	http://www.edu.ru/	Федеральный портал «Российское образование»
3	http://www.msu.ru	Сайт Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова

9. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ, ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ

1. ЭБС «Лань»
2. ЭБС «Консультант студента»
3. ЭБС «Znanium.com»
4. «Гарант» - справочно-правовая система

10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Материально-техническое обеспечение по реализации дисциплины осуществляется в соответствии с требованиями ФГОС ВО по данной образовательной программе.

11. ДЛЯ СТУДЕНТОВ, ОБУЧАЮЩИХСЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСТАНЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

При использовании электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (далее ЭО и ДОТ) занятия полностью или частично проводятся в режиме онлайн. Объем дисциплины и распределение нагрузки по видам работ соответствует п. 4.1. Распределение баллов соответствует п. 6.2 либо может быть изменено в соответствии с решением кафедры. В случае перехода на ЭО и ДОТ в процессе обучения. Решение кафедры об используемых технологиях и системе оценивания достижений обучающихся принимается с учетом мнения ведущего преподавателя и доводится до сведения обучающихся.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Аннотация к рабочей программе дисциплины

«Вариационное исчисление и методы оптимизации»

образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата

01.03.01 «Математика»

направленность: Математическое и программное обеспечение экономической деятельности

Трудоемкость дисциплины: 6з. е. (216 академических часов)

Семестр 7

Формы промежуточной аттестации: экзамен

Содержание дисциплины

Элементы дифференциального исчисления и выпуклого анализа; гладкие задачи с равенствами и неравенствами; правило множителей Лагранжа; задачи линейного программирования и проблемы экономики; теорема двойственности; классическое вариационное исчисление; уравнение Эйлера; условие второго порядка Лежандра и Якоби; задачи классического вариационного исчисления с ограничениями; необходимые условия в изопериметрической задаче и задаче со старшими производными; классическое вариационное исчисление и естествознание; оптимальное управление; оптимальное управление и задачи техники; методы решения задач линейного программирования; симплекс-метод; методы решения задач без ограничения; градиентные методы; метод Ньютона; методы сопряженных направлений; численные методы решения задач вариационного исчисления и оптимального управления.