

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Курганский государственный университет»  
(КГУ)

Кафедра «Математика и физика»



УТВЕРЖДАЮ:  
Первый проректор  
/ Змызгова Т.Р. /

« 01 » сентября 2023 г.

## Рабочая программа учебной дисциплины ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

образовательной программы высшего  
образования – программы специалитета 01.05.01 «Фундаментальная математика  
и механика»

Направленность: Математическое и программное обеспечение информационных  
систем.

Формы обучения: очная

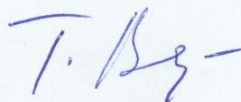
Курган 2023

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» составлена в соответствии с учебным планом программы специалитета 01.05.01 «Фундаментальная математика и механика» (Математическое и программное обеспечение информационных систем), утвержденного

- для очной формы обучения «30» июня 2023 года;

Рабочая программа дисциплины одобрена на заседании кафедры «Фундаментальная математика» «31» августа 2023, протокол № 1

Рабочую программу составил:  
доцент, к.ф.-м.н.,



Т.А. Вержбалович

Согласовано:

Заведующий кафедрой  
«Математика и физика»



М.В. Гаврильчик

Специалист по учебно-методической  
работе учебно-методического отдела



Г.В. Казанкова

Начальник управления  
образовательной деятельности



И.В. Григоренко

## 1. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Всего: 6 зачетных единиц трудоемкости (216 академических часа)

### Очная форма обучения

Вид учебной работы	На всю дисциплину	Семестр
		6
<b>Аудиторные занятия (всего часов), в том числе:</b>	<b>78</b>	<b>78</b>
Лекции	30	30
Практические занятия	48	48
<b>Самостоятельная работа (всего часов), в том числе:</b>	<b>138</b>	<b>138</b>
Контрольные работы	18	18
Подготовка к экзамену	27	27
Другие виды самостоятельной работы (самостоятельное изучение тем (разделов) дисциплины)	93	93
<b>Вид промежуточной аттестации:</b>	экзамен	экзамен
<b>Общая трудоемкость дисциплины и трудоемкость по семестрам в часах:</b>	<b>216</b>	<b>216</b>

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Функциональный анализ» относится к обязательной части учебного блока 1.

*Краткое содержание дисциплины.* Метрические и топологические пространства, мера и интеграл Лебега; Банаховы и Гильбертовы пространства. Линейные топологические пространства и обобщенные функции.

Данная дисциплина является логическим завершением изучения других дисциплин данного цикла: алгебра, геометрия, математический анализ, численные методы и др.

## 3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

Дисциплина «Функциональный анализ» необходимая дисциплина в формировании математической культуры специалиста.

Для математиков прикладной направленности функциональный анализ является очень важной дисциплиной, дающей наиболее общие методы решения задач из различных отраслей знаний на основе существенного обобщения математических моделей из конкретных наук.

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины:  
 - способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики (ОПК-1)

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

**Знать** информацию об метрических и топологических пространствах, интегральных уравнениях, мере и интеграле Лебега, обобщенных функциях, классических задачах вариационного исчисления; (ОПК-1)

**Уметь** находить мощность множеств, решать задачи методом сжимающих отображений, вычислять интегралы Лебега, решать простейшие интегральные уравнения; (ОПК-1)

**Владеть** сведениями о приложениях функционального анализа в конкретных науках. (ОПК-1)

## 4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 4.1. Учебно-тематический план

Рубеж дисциплины	Шифр раздела, темы дисциплины	Наименование раздела, темы дисциплины	Количество часов по видам учебных занятий		
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы
<i>6 семестр</i>					
	<i>P1</i>	<i>Множества. Мера линейных множеств.</i>	2	8	
<i>Рубеж 1</i>	<i>P2</i>	<i>Метрические пространства</i>	15	20	
	<i>P3</i>	<i>Интеграл Лебега</i>	2	6	
	<i>P4</i>	<i>Линейные операторы и функционалы</i>	5	6	
<i>Рубеж 2</i>	<i>P5</i>	<i>Линейные интегральные уравнения</i>	6	8	
<i>Итого:</i>			30	48	

### 4.2. Содержание лекционных занятий

Шифр раздела, темы дисциплины	Наименование раздела, темы дисциплины	Наименование и содержание (с указанием часов)	Норматив времени, часы
<i>6 семестр</i>			<i>30</i>
<i>P1</i>	<i>Множества. Мера линейных множеств.</i>	Функциональный анализ как самостоятельный раздел математики. Эквивалентные множества. Мощность множества. Счетные множества и их свойства	1

		Мощность континуума. Континуум-гипотеза Строение линейных множеств. Канторово совершенное множество.	1
		Мера Лебега линейных множеств. Общее понятие аддитивной меры. Лебеговское продолжение меры.	
<i>P2</i>	<i>Метрические пространства</i>	Метрические пространства. Открытые и замкнутые множества метрических пространств.	1
		Топологические пространства. Компактные множества в метрическом пространстве. Критерий Хаусдорфа. Теорема о стягивающих шарах.	2
		Нормированные векторные пространства. Пространства со скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского. Банаховы пространства. Сопряженное пространство, его полнота.	4
		Сходимость в метрических пространствах. Полнота метрических пространств.	2
		Теорема Банаха о сжимающих отображениях и ее применение к доказательству существования решения интегрального уравнения.	2
		Метод итераций решения математических задач. Принцип сжимающих отображений.	2
		Функции с ограниченным изменением. Спрямоимость кривых. Теорема Жордана о спрямоимости плоских кривых. Интеграл Стильтьеса, его свойства, вычисление и применение.	2
<i>P3</i>	<i>Интеграл Лебега</i>	Измеримые функции. Интеграл Лебега, его свойства и вычисление. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.	1
		Теорема Радона-Никодима. Прямое произведение мер и теорема Фубини. Пространства $L_1$ , $L_p$ ( $p > 1$ ). Неравенства Гельдера и Минковского.	1

<i>P4</i>	<i>Линейные операторы и функционалы</i>	Линейные операторы в линейных нормированных пространствах и их свойства. Теорема Банаха об обратном операторе. Норма оператора. Сопряженный оператор. Принцип равномерной ограниченности. Обратный оператор. Спектр и резольвента. Понятие об индексе. Теорема Фредгольма.	1
		Примеры использования теоремы Фредгольма (задача Штурма-Лиувилля, теория потенциала, индекс дифференциального оператора).	1
		Линейные функционалы. Общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала. Обобщенные функции и операции над ними (умножение на гладкую функцию, дифференцирование, замена переменных, преобразование Фурье). Полинормированные пространства	1
		Функционал Минковского. Нормируемость и метризуемость. Топологии в сопряженном пространстве. Слабая компактность шара в сопряженном пространстве. Основные пространства гладких функций.	2
<i>5</i>	<i>Линейные интегральные уравнения.</i>	Линейные интегральные уравнения. Интегральные операторы. Элементы линейного анализа: слабый и сильный дифференциал нелинейного функционала.  Экстремум функционала; классические задачи вариационного исчисления; уравнение Эйлера; вторая вариация; условия Лежандра и Якоби.	2
		Ортогональные системы; неравенство Бесселя; базисы и гильбертова размерность; теорема об изоморфизме, ортогональное дополнение; общий вид линейного функционала; самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы; ортопроекторы; спектр эрмитова и унитарного оператора; теорема Гильберта о компактных эрмитовых операторах.	2

		Функциональное исчисление; приведение оператора к виду умножения на функцию; спектральная теорема; неограниченные самосопряженные операторы; примеры.	2
--	--	---	---

### 4.3. Содержание практических занятий

Шифр раздела, темы дисциплины	Наименование раздела, темы дисциплины	Наименование и содержание (с указанием часов)	Норматив времени, часы.
		<b>6 семестр</b>	<b>48</b>
<i>P1</i>	<i>Множества. Мера линейных множеств.</i>	Функциональный анализ как самостоятельный раздел математики. Эквивалентные множества. Мощность множества. Счетные множества и их свойства	3
		Мощность континуума. Континуум-гипотеза Строение линейных множеств. Канторово совершенное множество.	3
		Мера Лебега линейных множеств. Общее понятие аддитивной меры. Лебеговское продолжение меры.	2
<i>P2</i>	<i>Метрические пространства</i>	Метрические пространства. Открытые и замкнутые множества метрических пространств.	4
		Топологические пространства. Компактные множества в метрическом пространстве. Критерий Хаусдорфа. Теорема о стягивающих шарах.	4
		Нормированные векторные пространства. Пространства со скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского. Банаховы пространства. Сопряженное пространство, его полнота.	4
		Сходимость в метрических пространствах. Полнота метрических пространств. Теорема Банаха о сжимающих отображениях и ее применение к доказательству существования решения интегрального уравнения.	4
		Метод итераций решения математических задач. Принцип сжимающих отображений.	2
		<i>Рубежный контроль №1</i>	2
<i>P3</i>	<i>Интеграл Лебега</i>	Измеримые функции. Интеграл Лебега, его свойства и вычисление. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.	4

		Теорема Радона-Никодима. Прямое произведение мер и теорема Фубини. Пространства $L_1$ , $L_p$ ( $p > 1$ ). Неравенства Гельдера и Минковского.	2
<i>P4</i>	<i>Линейные операторы и функционалы</i>	Линейные операторы в линейных нормированных пространствах и их свойства. Теорема Банаха об обратном операторе.	2
		Линейные функционалы. Общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах.	4
<i>P5</i>	<i>Линейные интегральные уравнения.</i>	Линейные интегральные уравнения. Интегральные операторы. Элементы линейного анализа: слабый и сильный дифференциал нелинейного функционала	2
		Ортогональные системы; неравенство Бесселя; базисы и гильбертова размерность; теорема об изоморфизме, ортогональное дополнение; общий вид линейного функционала; самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы; ортопроекторы; спектр эрмитова и унитарного оператора; теорема Гильберта о компактных эрмитовых операторах.	4
		<i>Рубежный контроль № 2</i>	2

#### 4.4. Контрольная работа

Контрольная работа выполняется согласно методических рекомендаций.

### 5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ.

При прослушивании лекций рекомендуется в конспекте отмечать все важные моменты, теоремы и формулы, доказательство теорем, свойств, на которых заостряет внимание преподаватель. Перед лекцией необходимо повторить материал, выделить непонятные места в лекции, чтобы обсудить их на занятии.

Преподавателем запланировано применение на лекционных занятиях технологий коллективного взаимодействия, групповая форма работы студентов на этапе повторения материала.

Практические занятия будут проводиться с использованием различных технологий (индивидуализированного обучения, групповой формы обучения)

Для текущего контроля успеваемости по очной форме обучения преподавателем используется балльно-рейтинговая система контроля и оценки академической активности. Поэтому настоятельно рекомендуется тщательно прорабатывать материал дисциплины при самостоятельной работе, участвовать во всех формах обсуждения и взаимодействия, как на лекциях, так и на практических



занятиях в целях лучшего освоения материала и получения высокой оценки по результатам освоения дисциплины.

Выполнение самостоятельной работы подразумевает самостоятельное изучение разделов дисциплины, подготовку к практическим занятиям, к рубежным контролям, подготовку к экзамену и выполнение контрольных работ.

Рекомендуемая трудоемкость самостоятельной работы представлена в таблице:

### Рекомендуемый режим самостоятельной работы Очная форма обучения

Шифр СРС	Виды самостоятельной работы студентов (СРС)	Трудоемкость, часы
C1	Самостоятельное или углублённое изучение разделов, тем дисциплины курса: Линейные интегральные уравнения. Интегральные операторы. Элементы линейного анализа: слабый и сильный дифференциал нелинейного функционала; экстремум функционала; классические задачи вариационного исчисления; уравнение Эйлера; вторая вариация; условия Лежандра и Якоби. Ортогональные системы; неравенство Бесселя; базисы и гильбертова размерность; теорема об изоморфизме, ортогональное дополнение; общий вид линейного функционала; самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы;	41
C2	Подготовка к аудиторным занятиям (по 2 ч. на каждое практическое занятие)	44
	Подготовка к рубежному контролю (по 4 ч. на каждый рубеж)	8
	Выполнение типового расчета и контрольных работ	18
C3	Подготовка к экзамену	27
	Итого:	<b>138</b>

## 6. Фонд оценочных средств для аттестации по дисциплине

### 6.1. Перечень оценочных средств

1. *Балльно-рейтинговая система контроля и оценки академической активности обучающихся в КГУ (для очной формы обучения)*
2. *Перечень вопросов к экзамену.*
3. *Задания для рубежного контроля №1,2*
4. *Контрольные работы*

### 6.2. Система балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся по дисциплине

1. Распределение баллов за успеваемость по дисциплине (практике)

Контролируемые мероприятия	Баллы
Текущий контроль ( $R_{тек}$ ) + Рубежный контроль ( $R_{руб}$ )	до 70 баллов
Академическая активность (доп. баллы $R_{доп}$ )	до 30 баллов
Промежуточная аттестация (зачет, дифференцированный зачет, экзамен) ( $R_{пром}$ )	<u>от 11 до 30 баллов</u> при неудовл. ответе - 0

Итог балльной оценки: ( $R_{\text{дис}} = R_{\text{тек}} + R_{\text{руб}} + R_{\text{пром}} + R_{\text{доп}}$ )

до 100 баллов

2. На промежуточной аттестации максимальное количество баллов, которое может получить обучающийся **равно 30 баллам**, минимальное количество баллов, при удовлетворительном ответе, **равно 11**.

Неудовлетворительный ответ оценивается в 0 баллов. **Не допускается оценивание обучающегося на промежуточной аттестации баллами больше 0, но менее 11.**

3. Для допуска к промежуточной аттестации по дисциплине (практике) за семестр обучающийся должен набрать по итогам текущего и рубежного контролей ( $R_{\text{тек}} + R_{\text{руб}}$ ) не менее 51 балла.

4. Если обучающийся набрал менее 51 балла, то к аттестационным испытаниям он не допускается, в ведомости делается запись **«Не допущен»**.

5. В случае неявки обучающегося на аттестационное испытание в ведомость заносится запись **«Не явился»**.

6. Если по дисциплине предусмотрена **курсовая работа (проект)**, то по ней выставляется отдельная оценка. Максимальная сумма по курсовой работе (проекту) устанавливается в 100 баллов:

- качество пояснительной записки и графической части – до 40 баллов;
- качество доклада – до 20 баллов;
- качество защиты работы – до 40 баллов.

7. При прохождении обучающимся **практики** максимальная сумма баллов за практику устанавливается в 100 баллов, из которой:

- 80 баллов отводятся на текущий контроль,
- 20 баллов отводятся на промежуточную аттестацию (от 11 баллов до 20 баллов).

8. Для получения экзамена или зачета **«автоматом»** обучающемуся необходимо набрать в ходе текущего и рубежных контролей не менее 61 балла. На усмотрение преподавателя, балльная оценка обучающегося может быть повышена за счет получения дополнительных баллов за академическую активность.

9. Обучающийся, имеющий право на оценку «автоматом», может повысить ее путем сдачи аттестационного испытания. В случае получения обучающимся на аттестационном испытании 0 баллов итог балльной оценки по дисциплине (практике) **не снижается**.

10. При заполнении **ведомости учета текущей успеваемости** в семестре столбцы «Рубеж 1» и «Рубеж 2» обязательны для заполнения. Столбец «Рубеж 3» заполняется в случае, если он предусмотрен РП дисциплины (если нет, то в ведомости ставится прочерк). В столбцы «Рубеж 1», «Рубеж 2» и «Рубеж 3» баллы по текущему контролю (ТК) и рубежному контролю (РК) записываются через дробь (ТК/РК).

11. В **ведомости учета текущей успеваемости** дополнительные баллы не суммируются с итоговой суммой баллов текущего и рубежного контролей.

12. В **зачетной и экзаменационной ведомости** в столбец «Дополнительные баллы» переносится сумма баллов за академическую активность из аналогичного столбца ведомости учета текущей успеваемости. В столбце «Итоговая сумма баллов» прописывается сумма баллов по столбцам «Сумма баллов текущего и рубежного контролей», «Сумма баллов на зачете/экзамене» и «Дополнительные баллы».

13. Ведомость заполняется преподавателем только **СИНЕЙ** ручкой и сдается в организационный отдел в день проведения промежуточной аттестации.

### Балльная оценка ответа обучающегося на промежуточной аттестации

Полнота ответа на вопросы билета	Оценка по 30-балльной шкале (R <sub>пром</sub> )
Получены полные ответы на все вопросы билета	25–30
Получены достаточно полные ответы на все вопросы билета	18–24
Получены неполные ответы на все или часть вопросов билета	11–17
Получены фрагменты ответов на вопросы билета или вопросы не раскрыты	0

### Шкала перевода баллов в ECTS для дисциплин и практик, завершающихся экзаменом или дифференцированным зачетом

Набранная обучающимся сумма баллов, R <sub>дис</sub>	Вид оценки		
	Традиционная оценка		Оценка по ECTS
91–100	5	Отлично	A
84–90	4	Хорошо	B
74–83	4	Хорошо	C
68–73	3	Удовлетворительно	D
61–67	3	Удовлетворительно	E
51–60	2	Неудовлетворительно	Fx

### Шкала перевода баллов в ECTS для дисциплин и практик, завершающихся зачетом

Набранные баллы	51–60	61–67	68–73	74–83	84–90	91–100
Зачтено/ не зачтено	Не зачтено	Зачтено				
Оценка по шкале ECTS	Fx	E	D	C	B	A

### Шкала перевода баллов в ECTS для защиты курсовой работы

Набранная	Вид оценки
-----------	------------

обучающимся сумма баллов, $R_{\text{дис}}$	Традиционная оценка		Оценка по ECTS
91–100	5	Отлично	A
84–90	4	Хорошо	B
74–83	4	Хорошо	C
68–73	3	Удовлетворительно	D
61–67	3	Удовлетворительно	E
0–60	2	Неудовлетворительно	Fx

### 6.3. Процедура оценивания результатов освоения дисциплины

Рубежные контроли проводятся в форме контрольных работ и самостоятельных письменных работ (3-4 заданий до 4 баллов каждое).

На каждый рубеж студенту отводится время не менее 90 минут.

Преподаватель оценивает в баллах результаты каждого обучаемого по количеству правильных ответов и заносит в ведомость учета текущей успеваемости.

Экзамен проводится по билетам, в которых один вопрос теоретический (оценивается до 10 баллов) и две задачи (до 10 баллов за каждую). Время, отводимое студенту на экзаменационное задание, составляет 1.5 астрономических часа.

Результаты текущего контроля успеваемости и экзамена заносятся преподавателем в экзаменационную ведомость, которая сдается в организационный отдел института в день экзамена, а также выставляются в зачетную книжку обучаемого.

### 6.4. Примеры оценочных средств для рубежных контролей и экзамена

#### *Рубеж 1*

1. Построить на отрезке  $[0,1]$  нигде не плотное совершенное множество, линейная мера которого равна  $0,9$ .

2. Можно ли построить на отрезке  $[0,1]$  совершенное нигде не плотное множество меры  $1$ ?

3. Доказать, что любое ограниченное измеримое множество  $E$  на прямой, имеющее

положительную линейную меру  $\rho$ , содержит измеримое подмножество  $E_1$  меры  $\rho$ , где  $\rho$  – произвольно заданное положительное число, меньшее, чем  $\rho$ .

4. Доказать, что всякое измеримое множество  $E$ , положительной меры, имеет мощность континуума.
5. Может ли равняться нулю мера множества, содержащего хотя бы одну внутреннюю точку?
6. Можно ли на отрезке  $[a, b]$  построить замкнутое множество линейной меры  $b-a$ , отличное от самого отрезка?
7. Доказать, что всякое непустое замкнутое множество нигде не плотно, если оно имеет меру нуль.
8. Являются ли метриками на прямой следующие функции:
  - а)  $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$ ,
  - б)  $\rho(x, y) = |x^2 - y^2|$ ,
  - в)  $\rho(x, y) = (x^2 + 2y^2)|x - y|$ ?
9. На множестве  $M = \{a, b, c\}$  задана метрика  $\rho$  такая, что  $\rho(a, b) = \rho(b, c) = 1$ . Какие значения может принимать  $\rho(a, c)$ ?
10. На окружности можно (проверьте это!) ввести две метрики – расстояния  $r(A, B)$  по хорде и расстояние  $\rho(A, B)$  по дуге. Как выражается одна метрика через другую?
11. Задаёт ли метрику на пространстве многочленов формула  $\rho(P_1, P_2) = |P_1(0) - P_2(0)|$ ?
12. Пусть  $M_n$  – множество всевозможных  $n$ -буквенных слов из русского алфавита. Назовем расстоянием между словами  $x$  и  $y$  количество позиций, на которых у слов  $x$  и  $y$  устоят разные буквы. Докажите, что  $M_n$  – метрическое пространство.
13. Образует ли метрическое пространство множество точек плоскости, если определить расстояние между точками  $M(x_1, y_1)$  и  $N(x_2, y_2)$  формулой
 
$$\rho(M, N) = (\sqrt{|x_1 - x_2|} + \sqrt{|y_1 - y_2|})^2?$$

### **Рубеж 2**

1. Сходится ли последовательность  $A_n \left( \frac{n+2}{n^2}, \frac{(-1)^n}{n} \right)$  в соответствующей метрике?
2. Проверьте, сходится ли последовательность функций  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$  к функции  $f(x) \equiv 0$  в пространстве: а)  $C[0, 1]$ ; б)  $C_1[0, 1]$ .

3. Покажите, что последовательность функций  $f_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$  сходится в пространстве  $D_1[0,1]$  к функции  $f(x) \equiv 0$ .

4. Проверьте, сходится ли последовательность  $f_n(x) = xe^{-nx}$  к функции  $f(x) \equiv 0$  по метрике пространства а)  $C[0,10]$ ; б)  $C_1[0,10]$ .

7. Является ли сжимающим отображение  $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$  промежутка  $[3; +\infty)$  в себя?

9. Покажите, что функция  $f(x) = \sqrt[3]{1000 - x}$  отображает отрезок  $[9;10]$  в себя. Сжимающее ли это отображение?

10. Вариация функции  $f(x)$  на  $[a,b]$  равна  $A$ . Чему равна вариация функции  $kf(x) + m$  на  $[a,b]$ ?

11. Чему равна вариация функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0, \\ 1 - x, & \text{при } 0 < x < 1, \\ 5, & \text{при } x = 1 \end{cases}$$

на отрезке  $[0,1]$ ?

12. Чему равна вариация функции

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{при } x < 1, \\ 10, & \text{при } x = 1, \\ x^2, & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

на отрезке  $[0,2]$ ?

13. Как изменить значение функции из предыдущей задачи в точке разрыва ( $x=1$ ), чтобы вариация функции стала наименьшей?

14. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0, \\ x^2 \cdot \cos \frac{\pi}{x}, & \text{при } x \neq 0, \end{cases}$$

имеет ограниченную вариацию на отрезке  $[0,1]$ .

15. Вычислить  $(s) \int_{-1}^1 x^4 dg$ , если

$$g(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{при } -1 \leq x < 0, \\ 10, & \text{при } x = 0 \\ x^6, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

16. Вычислить  $(s) \int_{-2}^2 (x^3 + x + 1) dg$ , если

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = -2, \\ x + 2, & \text{при } x \in (-2, 0), \\ 4, & \text{при } x = 0, \\ x^2 + 2, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

### **Вопросы к экзамену (6 семестр)**

1. Эквивалентные множества. Мощность множеств. Счетные множества. Существование различных мощностей.
2. Мощность континуума. Несчетность  $[0;1]$ .
3. Строение линейных множеств.
4. Мера Лебега линейных множеств.
5. Метрические пространства.
6. Нормированные векторные пространства.
7. Сходимость последовательностей в метрических пространствах.
8. Полные метрические пространства. Банаховы пространства.
9. Теорема Банаха о сжимающих отображениях.
10. Приложение теоремы Банаха к решению интегральных уравнений.
11. Функции с ограниченным изменением. Классы функций с ограниченным изменением.
12. Свойства функций с ограниченным изменением. Критерии для функций с ограниченным изменением.
13. Спрямолинейные непрерывные кривые.
14. Определение интеграла Стильеса и его свойства.
15. Вычисление интеграла Стильеса.
16. Измеримые функции и их свойства.
17. Определение интеграла Лебега.
18. Свойства интеграла Лебега и его вычисление.
19. Обобщенные функции и действия над ними.
20. Дифференцируемость обобщенных функций.
21. Достаточность запаса основных функций для множества обобщенных функций.
22. Линейные операторы в линейных нормированных пространствах.
23. Свойство непрерывности линейного оператора.
24. Ограниченность линейного оператора. Связь непрерывности и ограниченности линейного оператора. Норма оператора.
25. Линейные функционалы. Общий вид линейного функционала в  $\mathbb{R}^n$ .
26. Понятия об интегральных уравнениях и их классификации.

### **6.5 Фонд оценочных средств**

Полный банк заданий для текущего, рубежных контролей и промежуточной аттестации по дисциплине, показатели, критерии, шкалы оценивания компетенций, методические материалы, определяющие процедуры оценивания

образовательных результатов, приведены в учебно-методическом комплексе дисциплины.

## **7. ОСНОВНАЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА**

### **7.1. Основная учебная литература**

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – Издательство: М. – Физмалит, 2019г.
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. -М.: Высшая школа, 1982.
4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - М.: Наука, 1974.

### **7.2. Дополнительная литература**

1. Вержбалович Т.А. Элементы функционального анализа [Электронный ресурс]: учебное пособие / Т.А. Вержбалович, Ю.С. Малышева ; Министерство образования Российской Федерации, Курганский государственный университет. - Электрон. текстовые дан. (тип файла: pdf ; размер: 2,48 Mb). - Курган : Издательство Курганского государственного университета, 2015. - 64, [2] с.: ил. - Библиогр.: с. 63. - ISBN 978-5-4217-0303-7. <http://dspace.kgsu.ru/xmlui/handle/123456789/4161>
2. Вержбалович Т.А., Малышева Ю.С. Элементы функционального анализа: учебное пособие. – Курган : Изд-во Курганского гос. ун-та, 2015. – 65 с.
3. Вулих Б.З. Краткий курс теории вещественной переменной. - М.: Наука, 1973.
4. Нуютов А.А. Практикум по функциональному анализу. Нижний Новгород, 2016.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. - М.: Наука, 1970.

## **8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ 9. РЕСУРСЫ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

<b>Интернет-ресурс</b>	<b>Краткое описание</b>
<a href="http://en.edu.ru/">http://en.edu.ru/</a>	Портал является составной частью федерального портала "Российское образование". Содержит ресурсы и ссылки на ресурсы по естественно-научным дисциплинам (физика, математика, химия и биология).
<a href="http://www.edu.ru/">http://www.edu.ru/</a>	Федеральный портал «Российское образование»
<a href="http://www.msu.ru">http://www.msu.ru</a>	Сайт Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова

## **10. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ, ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ**



## **10. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ, ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ**

1. ЭБС «Лань»
2. ЭБС «Консультант студента»
3. ЭБС «Znanium.com»
4. Гарант – справочно-правовая система

## **11. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

Материально-техническое обеспечение по реализации дисциплины осуществляется в соответствии с требованиями ФГОС ВО по данной образовательной программе.

## **12. ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСТАНЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

При использовании электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (далее ЭО и ДОТ) занятия полностью или частично проводятся в режиме онлайн. Объем дисциплины и распределение нагрузки по видам работ соответствует п. 4.1. Распределение баллов соответствует п. 6.2 либо может быть изменено в соответствии с решением кафедры, в случае перехода на ЭО и ДОТ в процессе обучения. Решение кафедры об используемых технологиях и системе оценивания достижений обучающихся принимается с учетом мнения ведущего преподавателя и доводится до обучающихся.

Аннотация к рабочей программе дисциплины  
**ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ**

образовательной программы высшего  
образования – программы специалитета 01.05.01 «Фундаментальные математика  
и механика» специализация: Математическое и программное обеспечение  
информационных систем.

Формы обучения: очная

Трудоемкость дисциплины: 6 з е (216 академических часа)

Семестр: 6.

Форма промежуточной аттестации: экзамен

Содержание дисциплины

Метрические и топологические пространства, мера и интеграл Лебега; Банаховы и Гильбертовы пространства. Линейные топологические пространства и обобщенные функции.