

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Курганский государственный университет»
(КГУ)

Кафедра «Фундаментальная математика»



УТВЕРЖДАЮ:
Ректор КГУ
/ Н.В. Дубив /
« 09 сентября » 2020 г.

Рабочая программа учебной дисциплины

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

образовательной программы высшего образования –
программы бакалавриата

01.03.01 – Математика

**Направленность: Математическое и программное обеспечение вычисли-
тельных систем и компьютерных сетей**

Формы обучения: очная

Курган 2020

Рабочая программа дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология»

составлена в соответствии с учебными планами по программе бакалавриата Математика (Математическое и программное обеспечение вычислительных систем и компьютерных сетей), утвержденными:
- для очной формы обучения «28» августа 2020 года.

Рабочая программа дисциплины одобрена на заседании кафедры «Фундаментальная математика» «3» сентября 2020 года, протокол № 1.

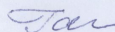
Рабочую программу составил
старший преподаватель кафедры ФМ



Т.В. Корнюшева

Согласовано:

Заведующий кафедрой «ФМ»
к.ф.-м.н., доцент



М.В.Гаврильчик

Специалист по учебно-методической работе
Учебно-методического отдела



Г.В.Казанкова

1. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Всего: 6 зачетных единицы трудоемкости (216 академических часа)

Очная форма обучения

Вид учебной работы	На всю дисциплину	Семестр
		4
Аудиторные занятия (контактная работа с преподавателем), всего часов	80	80
в том числе:		
Лекции	32	32
Практические занятия	48	48
Самостоятельная работа, всего часов	136	136
в том числе:		
Подготовка к зачету	18	18
Другие виды самостоятельной работы	118	118
Вид промежуточной аттестации	Зачет	Зачет
Общая трудоемкость дисциплины и трудоемкость по семестрам, часов	216	216

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Дифференциальная геометрия и топология» относится к обязательной части блока I подготовки по направлению 01.03.01.«Математика» направленность: Математическое и программное обеспечение вычислительных систем и компьютерных сетей.

Дифференциальная геометрия и топология является одним из основных разделов современной математики. Знание этого раздела является важной составляющей общей математической культуры выпускника. Эти знания необходимы как при проведении теоретических исследований в различных областях математики, так и при решении практических задач из разнообразных прикладных областей.

Для успешного изучения данной дисциплины необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения школьного курса математики, а также курсов «Аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Алгебра».

Требования к входным знаниям, умениям, навыкам и компетенциям:

- владение аппаратом аналитической геометрии (векторы, координаты, прямые и плоскости, уравнения прямых и плоскостей и т.д.);
- владение аппаратом алгебры (матрицы, системы линейных уравнений, линейные и евклидовы пространства, квадратичные формы и т.д.);
- владение аппаратом математического анализа (предел и производная функции, применение производной для исследования функции, неопределенный и определенный интегралы, методы интегрирования и т.д.).

3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

Основной целью курса является формирование математической культуры обучающегося, фундаментальная подготовка по основным разделам дифференциальной геометрии и топологии, а также овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач.

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины:

- способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности (ОПК-1).

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

Знать

основные понятия и методы изучаемых разделов;

определения и свойства математических объектов, используемых в данной области;

Уметь

формулировать проблему в терминах дифференциальной геометрии и топологии);

решать основные типы задач;

формулировать и доказывать основные теоремы изучаемых разделов;

Владеть

методами доказательства утверждений в этой области;

навыками практического использования математических методов при анализе различных задач.

4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Учебно-тематический план

Очная форма обучения

Рубежный контроль	Шифр раздела, темы дисциплины	Наименование раздела, темы дисциплины	Количество часов по видам учебных занятий	
			Лекции	Практические занятия
Рубеж 1	Р1	Дифференциальная геометрия	16	24
Рубеж 2		Неевклидовы геометрии	0	8
Рубеж 3	Р3	Элементы общей топологии	8	6
	Р4	Топология многообразий	8	10

4.2. Содержание лекционных занятий

Раздел 1. Дифференциальная геометрия

Тема 1. *Кривые в трехмерном евклидовом пространстве.*

Кривые, способы задания кривых. Пространственные кривые, репер Френе, кривизна и кручение пространственных кривых, формулы Френе.

Тема 2. *Поверхности в трехмерном евклидовом пространстве.*

Поверхности, способы задания поверхностей, координаты на поверхности, касательная плоскость, первая квадратичная форма поверхности, площадь поверхности, кривизна кривых на поверхности. Вторая квадратичная форма и ее свойства, инварианты пары квадратичных форм, средняя и гауссова кривизна поверхности.

Тема 3. *Внутренняя геометрия поверхности.*

Предмет внутренней геометрии поверхности, теорема Гаусса. Геодезическая кривизна, геодезические линии и их свойства.

Раздел 3. Элементы общей топологии

Тема 1. *Топологические пространства*

Определение и примеры топологического пространства. Подпространство топологического пространства. Внутренность, замыкание, граница. Непрерывные отображения и гомеоморфизмы топологических пространств.

Тема 2. *Топологические инварианты*

Отделимость, связность и линейная связность топологических пространств, компактность и компакты в топологических пространствах.

Раздел 4. Топология многообразий

Тема 1. *Основные понятия.*

Определение и примеры многообразий. Многообразие с краем, локальные координаты точек многообразия. Отображение многообразий, определение гладкого многообразия. Примеры многообразий: гладкие поверхности, матричные группы, проективное пространство.

Тема 2. *Топологические многообразия малых размерностей.*

Клеточные разбиения. Теорема Эйлера. Топологическая классификация ориентируемых замкнутых поверхностей, проективное пространство.

4.3 Практические занятия

4.5 Практические занятия			
Шифр раздела, темы дисци- плины	Наименование раздела, те- мы дисциплины	Наименование и содержание практических заня- тий (с указанием часов)	Трудо- ем- кость, часы
Р1	Дифференциальная гео- метрия	Кривые в трехмерном евклидовом простран- стве	8
		Рубеж №1	2
		Поверхности в трехмерном евклидовом про- странстве	8
		Контрольная работа (рубеж №2)	2
		Внутренняя геометрия поверхностей	4
Р2	Неевклидовы геометрии	Неевклидовы геометрии	8
Р3	Элементы общей тополо- гии	Топологические пространства	4
		Топологические инварианты. Рубеж №3	2
Р4	Топология многообразий	Основные понятия	3
		Топологические многообразия малой раз- мерности	5
		Рубеж №4	2
Всего:			48

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

При прослушивании лекций рекомендуется в конспекте отмечать все важные моменты, теоремы и формулы, доказательство теорем, свойств, на которых заостряет внимание преподаватель. Перед лекцией необходимо повторить материал, выделить непонятные места в лекции, чтобы обсудить их на занятии.

Практические занятия будут проводиться с использованием различных технологий (индивидуализированного обучения, групповой формы обучения).

Для текущего контроля успеваемости по очной форме обучения преподавателем используется балльно-рейтинговая система контроля и оценки академической активности. Поэтому настоятельно рекомендуется тщательно прорабатывать материал дисциплины при самостоятельной работе, участвовать во всех формах обсуждения и взаимодействия, как на лекциях, так и на практических занятиях в целях лучшего освоения материала и получения высокой оценки по результатам освоения дисциплины.

Выполнение самостоятельной работы подразумевает самостоятельное изучение разделов дисциплины, подготовку к практическим занятиям, к рубежным контролям, подготовку к зачету.

Рекомендуемая трудоемкость самостоятельной работы представлена в таблице:

Рекомендуемый режим самостоятельной работы

Наименование вида самостоятельной работы	Рекомендуемая трудоемкость, акад. час.
Самостоятельное изучение тем дисциплины:	70
Неевклидовы геометрии	35
Модели проективного пространства	35
Подготовка к практическим занятиям (по 2 часа на каждое занятие)	40
Подготовка к рубежным контролям (по 2 часа на каждый рубеж)	8
Подготовка к зачету	18
Всего:	136

6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

6.1. Перечень оценочных средств

1. Балльно-рейтинговая система контроля и оценки академической активности обучающихся (для очной формы обучения)
2. Перечень вопросов к зачету.
3. Задания для рубежного контроля №1-4.
4. Перечень вопросов для самостоятельного изучения.

6.2. Система балльно-рейтинговой оценки работы обучающихся по дисциплине

№	Наименование	Содержание					
		Распределение баллов					
1	Распределение баллов за семестры по видам учебной работы, сроки сдачи учебной работы (доводятся до сведения обучающихся на первом учебном занятии)	Вид учебной работы:	Посещение лекций	Практические занятия (включая выполнение домашней работы)	Рубежный контроль №1-4	Индивидуальные задания	Зачет
		Балльная оценка:	До 16	До 20	До 28	До 6	До 30
		Примечания:	16 лекций по 1 баллу	До 1го балла за занятие	До 7 баллов за рубеж	Вопросы для самостоятельного изучения	
2	Критерий пересчета баллов в традиционную оценку по итогам работы в семестре и зачета	60 и менее баллов – неудовлетворительно; 61...73 – удовлетворительно; 74... 90 – хорошо; 91...100 – отлично					
3	Критерии допуска к промежуточной аттестации, возможности получения автоматического зачета (экзаменационной оценки) по дисциплине, возможность получения бонусных баллов	Для допуска к промежуточной аттестации по дисциплине за семестр обучающийся должен набрать по итогам текущего и рубежного контролей не менее 50 баллов. В случае если обучающийся набрал менее 50 баллов, то к аттестационным испытаниям он не допускается. Для получения зачета «автоматически» обучающемуся необходимо набрать в ходе текущего и рубежных контролей не менее 61 балла. В этом случае итог балльной оценки, получаемой обучающимся, определяется по количеству баллов, набранных им в ходе текущего и рубежных контролей.					
4	Формы и виды учебной работы для неуспевающих (восстановившихся на курсе обучения) обучающихся для получения недостающих баллов в конце семестра	В случае если к промежуточной аттестации (экзамену) набрана сумма менее 50 баллов, обучающемуся необходимо набрать недостающее количество баллов за счет выполнения дополнительных заданий, до конца последней (зачетной) недели семестра. При этом необходимо проработать материал всех пропущенных практических работ. Формы дополнительных заданий (назначаются преподавателем): - выполнение и защита отчетов по пропущенным практическим занятиям (0,5 балла); - прохождение рубежного контроля (баллы в зависимости от рубежа). Ликвидация академических задолженностей, возникших из-за разности в учебных планах при переводе или восстановлении, проводится путем выполнения дополнительных заданий, форма и объем которых определяется преподавателем.					

6.3. Процедура оценивания результатов освоения дисциплины

Рубежные контроли проводятся в форме самостоятельной письменной работы, за каждую из которых обучающийся может получить до 7 баллов (баллы по заданиям указаны в п. 6.4).

На рубежи 1, 2, 4 обучающемуся отводится время не менее 90 минут, на рубеж 3 – не менее 20.

Преподаватель оценивает в баллах результаты каждого обучающегося по количеству правильных ответов и заносит в ведомость учета текущей успеваемости.

Зачет проводится по билетам, в каждом из которых два вопроса теоретических (каждый оценивается до 7 баллов) и две задачи (каждая до 8 баллов). Время, отводимое обучающемуся на зачетное задание, составляет не менее полутора астрономических часов.

Результаты текущего контроля успеваемости и зачета заносятся преподавателем в зачетную ведомость, которая сдается в организационный отдел института в день зачета, а также выставляются в зачетную книжку обучающегося.

6.4. Примеры оценочных средств для зачета и рубежных контролей

Вопросы к зачету

1. Вектор – функция скалярного аргумента. Понятие линии и кривой.
2. Регулярные кривые.
3. Касательная к кривой.
4. Нормальная плоскость к линии.
5. Длина дуги. Натуральный параметр.
6. Кривизна кривой. Репер Френе.
7. Формулы Френе.
8. Кручение кривой.
9. Кривизна и кручение в произвольной параметризации.
10. Понятие поверхности.
11. Касательная плоскость к поверхности.
12. Нормаль к поверхности.
13. Первая квадратичная форма поверхности. Задачи.
14. Вторая квадратичная форма поверхности.
15. Кривизна линий на поверхности.
16. Формула Эйлера. Главные направления, главные кривизны, полная и средняя кривизны поверхности.
17. Типы точек поверхности.
18. Поверхности постоянной кривизны. Пример.
19. Понятие об изгибании поверхности. Предмет внутренней геометрии поверхности.
20. Геодезическая кривизна линий на поверхности.
21. Геодезическая линия, ее свойства. Примеры геодезических линий.
22. Геодезический треугольник и его дефект.
23. Определение и примеры метрических пространств.
24. Открытые множества в метрических пространствах.
25. Непрерывное отображение метрических пространств.

26. Определение и примеры топологических пространств.
27. Внутренность, замыкание и граница множества в топологическом пространстве.
28. Непрерывные отображения и гомеоморфизм топологических пространств.
29. Связность и линейная связность топологических пространств.
30. Аксиомы отделимости топологического пространства.
31. Компактность топологического пространства.
32. Критерий компактности подмножества евклидова пространства.
33. Определение и примеры топологических многообразий.
34. Гладкие многообразия.
35. Погружение многообразий.
36. Простейшие замкнутые поверхности.
37. Клеточное разбиение, триангуляции поверхности.
38. Определение и примеры ориентируемых и неориентируемых поверхностей.
39. Эйлерова характеристика поверхности (определение и теорема о независимости характеристики от разбиения).
40. Связная сумма поверхностей. Эйлерова характеристика связной суммы поверхностей.
41. Теорема классификации замкнутых поверхностей.
42. Связь эйлеровой характеристики поверхности и её рода.

Рубеж № 1.

1. Дана кривая $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = \sin t$.
Найти:
а) (2 балла) кривизну и кручение линии в произвольной точке кривой;
б) (2 балла) уравнения касательной прямой, нормальной плоскости, соприкасающейся плоскости, бинормали, главной нормали в точке $t = 0$.
2. (3 балла) Найти длину дуги астроида $x = \alpha \cos^3 t, y = \alpha \sin^3 t, z = 0$ при $0 \leq t \leq 2\pi$.

Рубеж №2 .

1. (2 балла) Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^3 + 2y^2$ в точке $M(1, 1, 3)$.
2. (2 балла) Найти угол между линиями $u = \frac{1}{2} \alpha v^2, u = -1/2 \alpha v^2$ на поверхности, имеющей первую квадратичную форму $\varphi_1 = du^2 + (u^2 + \alpha^2)dv^2$ ($\alpha = \text{const}$).
3. (3 баллов) Дан эллипсоид вращения:
 $x = \alpha \cos u \cdot \cos v, y = \alpha \cos u \cdot \sin v, z = c \sin u$.
а) Найти φ_1, φ_2 .
б) В точке $u_0 = \pi/2, v_0 = 0$ найти k_1, k_2, K, H .

Рубеж № 3.

Ответить на следующие вопросы теории, привести примеры там, где это необходимо (по 1 баллу за задание).

1. Определение и примеры метрических пространств. Открытые множества в метрических пространствах.
2. Непрерывное отображение метрических пространств. Определение и примеры топологических пространств.
3. Внутренность, замыкание и граница множества в топологическом пространстве.
4. Непрерывные отображения и гомеоморфизм топологических пространств.
5. Связность и линейная связность топологических пространств.
6. Аксиомы отделимости топологического пространства.
7. Компактность топологического пространства. Критерий компактности подмножества евклидова пространства.

Рубеж № 4. (2 балла за задание 1, по 1 баллу за задания 2 – 6)

1. Доказать, что ρ задают метрику на R^2 , $x(x_1, x_2), y(y_1, y_2) \in R^2$.
 $\rho_1(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$
 $\rho_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
2. Доказать, что любые два интервала в R^1 гомеоморфны.
3. Доказать, что $\chi(F_1 \# F_2) = \chi(F_1) + \chi(F_2) - 2$.
4. Пусть F – замкнутая ориентируемая поверхность рода g . Доказать, что $\chi(F) = 2 - 2g$.
5. Известно, что поверхность F имеет 4 компоненты края и ее эйлерова характеристика равна -7. Определить тип поверхности F .
6. Известно, что поверхность F имеет 3 компоненты края и ее эйлерова характеристика равна -5. Определить тип поверхности F .

Вопросы для самостоятельного изучения (Индивидуальные задания)

1. Аксиома Лобачевского. Параллельные прямые и их свойства в плоскости Лобачевского.
2. Сверхпараллельные прямые и их свойства в плоскости Лобачевского.
3. Угол параллельности. Функция Лобачевского.
4. Треугольники и четырехугольники в плоскости Лобачевского.
5. Пучки прямых в плоскости Лобачевского. Простейшие кривые.
6. Доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского. Модель Пуанкаре.
7. Доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского. Модель Кэли – Клейна.
8. Понятие о сферической геометрии.
9. Понятие об эллиптической геометрии.
10. Различные модели проективной плоскости.

6.5. Фонд оценочных средств

Полный банк заданий для текущего, рубежных контролей и промежуточной аттестации по дисциплине, показатели, критерии, шкалы оценивания компетенций, методические материалы, определяющие процедуры оценивания образовательных результатов, приведены в учебно-методическом комплексе дисциплины.

7. ОСНОВНАЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

7.1. Основная учебная литература

1. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии [Электронный ресурс] / Мищенко А. С, Фоменко А. Т. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 304 с. – Доступ из ЭБС «Консультант студента»
2. Курс геометрии: элементы топологии, дифференциальная геометрия, основания геометрии [Электронный ресурс] / Кузовлев В.П., Подаева Н.Г. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 208 с. – Доступ из ЭБС «Консультант студента»
3. Рустанов, А. Р. Элементы дифференциальной геометрии : учебное пособие / А. Р. Рустанов, С. В. Харитонов, Е. А. Польшкина. - Москва : МПГУ, 2020. - 100 с. – Доступ из ЭБС «Znanium.com»

7.2. Дополнительная литература

1. Подран, В.Е. Элементы топологии. – Изд.2-е, испр. И доп. – СПб.;М.: Краснодар : Лань, 2008.
2. Игнаточкина, Л. А. Топология для бакалавров математики / Игнаточкина Л. А. - Москва : Прометей, 2016. - 88 с. – Доступ из ЭБС "Консультант студента".

8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

1. Козлова Д.Ф. Методические указания, упражнения и контрольные задания по курсу «Дифференциальная геометрия». – Курган: Курганский пединститут, 1991. – 31 с.

9. РЕСУРСЫ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел включается в рабочую программу при необходимости

Пример:

1. dist.kgsu.ru - Система поддержки учебного процесса КГУ;

2. www.mylect.ru - Лекции онлайн по дисциплине Теория автоматического управления.

10. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ, ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ

1. ЭБС «Лань»
2. ЭБС «Консультант студента»
3. ЭБС «Znaniy.com»
4. Гарант – справочно-правовая система

11. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Материально-техническое обеспечение по реализации дисциплины осуществляется в соответствии с требованиями ФГОС ВО по данной образовательной программе.

12. ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСТАНЦИОН- НЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

При использовании электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (далее ЭО и ДОТ) занятия полностью или частично проводятся в режиме онлайн. Объем дисциплины и распределение нагрузки по видам работ соответствует п. 4.1. Распределение баллов соответствует п. 6.2 либо может быть изменено в соответствии с решением кафедры, в случае перехода на ЭО и ДОТ в процессе обучения. Решение кафедры об используемых технологиях и системе оценивания достижений обучающихся принимается с учетом мнения ведущего преподавателя и доводится до обучающихся.

Аннотация к рабочей программе дисциплины
Дифференциальная геометрия и топология

образовательной программы высшего образования –
программы бакалавриата
01.03.01 – Математика

Направленность: Математическое и программное обеспечение вычислительных систем и компьютерных сетей

Трудоемкость дисциплины: 63Е (216 академических часа)

Семестр: 4 (очная форма обучения).

Форма промежуточной аттестации: зачет (для очной формы обучения)

Содержание дисциплины

Геометрия кривых в евклидовом пространстве. Геометрия поверхностей в евклидовом пространстве. Внутренняя геометрия поверхностей. Элементы общей топологии. Топология многообразий.

ЛИСТ
регистрации изменений (дополнений) в рабочую программу
учебной дисциплины
«Дифференциальная геометрия и топология»

Изменения / дополнения в рабочую программу
на 20__ / 20__ учебный год:

Ответственный преподаватель _____ / Ф.И.О. _____ /

Изменения утверждены на заседании кафедры «__» _____ 20__ г.,
Протокол № ____

Заведующий кафедрой _____ «__» _____ 20__ г.

Изменения / дополнения в рабочую программу
на 20__ / 20__ учебный год:

Ответственный преподаватель _____ / Ф.И.О. _____ /

Изменения утверждены на заседании кафедры «__» _____ 20__ г.,
Протокол № ____

Заведующий кафедрой _____ «__» _____ 20__ г.