

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Курганский государственный университет»
(КГУ)

Кафедра «Фундаментальной математики»



УТВЕРЖДАЮ:

ректор КГУ

/ Н.В. Дубив /

«05» сентября 2020 г.

Рабочая программа учебной дисциплины

Дифференциальная геометрия и топология

образовательной программы высшего образования –
программы специалитета

01.05.01 Фундаментальная математика и механика

Направленность: Математическое и компьютерное моделирование
механических систем

Формы обучения: очная

Курган 2020

Рабочая программа дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология»

составлена в соответствии с учебными планами по программе специалитета
Фундаментальная математика (Математическое и компьютерное
обеспечение моделирование механических систем), утвержденными:
- для очной формы обучения « 28 » августа 2020года.

Рабочая программа дисциплины одобрена на заседании кафедры
«Фундаментальная математика» «3» сентября 2020 года, протокол № 1.

Рабочую программу составил
старший преподаватель кафедры ФМ



Т.В.Корнюшева

Согласовано:

Заведующий кафедрой «ФМ»
к.ф.-м.н., доцент



М.В.Гаврильчик

Специалист по учебно-методической работе
Учебно-методического отдела



Г.В.Казанкова

1. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Всего: 5 зачетных единицы трудоемкости (180 академических часов)

Очная форма обучения

Вид учебной работы	На всю дисциплину	Семестр	
		5	6
Аудиторные занятия (контактная работа с преподавателем), всего часов в том числе:	60	32	28
Лекции	30	16	14
Практические занятия	30	16	14
Самостоятельная работа, всего часов в том числе:	120	40	80
Подготовка к зачету	36	18	18
Другие виды самостоятельной работы (самостоятельное изучение тем (разделов) дисциплины)	84	22	62
Вид промежуточной аттестации	Зачет	Зачет	Зачет
Общая трудоемкость дисциплины и трудоемкость по семестрам, часов	180	72	108

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Дифференциальная геометрия и топология» относится к базовой части блока I подготовки по специальности 01.05.01 «Фундаментальные математика и механика: математическое и компьютерное моделирование механических систем»

Требования к входным знаниям, умениям и компетенциям студента формируются на основе программы среднего (полного) общего образования по математике (базовый уровень). Студент должен владеть основными понятиями математики, уметь применять их на практике, уметь анализировать и обобщать воспринимаемую информацию.

Освоение дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» опирается также на знания, умения, навыки и компетенции, приобретенные в результате освоения дисциплин:

- математический анализ,
- аналитическая геометрия,
- алгебра

Дифференциальная геометрия и топология относится к числу основных разделов современной математики. Знание этого раздела является важной составляющей общей математической культуры выпускника. Эти знания необходимы как при проведении теоретических исследований в различных областях математики, так и при решении практических задач из разнообразных прикладных областей.

3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

Основной целью курса является формирование математической культуры студента, фундаментальная подготовка по основным разделам дифференциальной геометрии и топологии, а также овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач.

Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины:

ОПК-1 Способность находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики.

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

знать: основные понятия, определения и свойства математических объектов, используемых в данной области, возможные сферы их приложений ;

уметь: формулировать проблему в терминах дифференциальной геометрии и топологии и применять полученные знания при изучении других дисциплин ;

владеть: методами решения задач дифференциальной геометрии и топологии.

4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Учебно-тематический план

Очная форма обучения

Рубежн ый контрол ь	Шифр раздела, темы дисципли ны	Наименование раздела, темы дисциплины	Количество часов по видам учебных занятий	
			Лекции	Практические занятия
		5 семестр	16	16
Рубеж 1	P1	Элементы общей топологии	8	8
Рубеж 2	P2	Топология многообразий	8	8
		6 семестр	14	14
Рубеж 3 Рубеж 4	P3	Дифференциальная геометрия	14	12
	P4	Неевклидовы геометрии	0	2

4.2. Содержание лекционных занятий

5 семестр

Раздел 1. Элементы общей топологии

Тема 1. Топологические пространства

Определение и примеры топологического пространства. Подпространство топологического пространства. Внутренность, замыкание, граница. Непрерывные отображения и гомеоморфизмы топологических пространств.

Тема 2. Топологические инварианты

Отделимость, связность и линейная связность топологических пространств, компактность и компакты в топологических пространствах.

Раздел 2. Топология многообразий

Тема 1. Основные понятия.

Определение и примеры многообразий. Многообразие с краем, локальные координаты точек многообразия. Отображение многообразий, определение гладкого многообразия. Примеры многообразий: гладкие поверхности, матричные группы, проективное пространство.

Тема 2. Топологические многообразия малых размерностей.

Клеточные разбиения. Теорема Эйлера. Топологическая классификация ориентируемых замкнутых поверхностей, проективное пространство. Непрерывные

6 семестр

Раздел 3. Дифференциальная геометрия

Тема 1. Кривые в трехмерном евклидовом пространстве.

Геометрические объекты: кривые - способы задания. Пространственные кривые, репер Френе, кривизна и кручение пространственных кривых, формулы Френе.

Тема 2. Поверхности в трехмерном евклидовом пространстве.

Поверхности, способы задания поверхностей, координаты на поверхности, касательная плоскость, первая квадратичная форма поверхности, площадь

поверхности, кривизна кривых на поверхности. Вторая квадратичная форма и ее свойства, инварианты пары квадратичных форм, средняя и гауссова кривизна поверхности.

Тема 3. *Внутренняя геометрия поверхности.*

Предмет внутренней геометрии поверхности, теорема Гаусса. Геодезическая кривизна, геодезические линии и их свойства.

4.3 Практические занятия

Шифр раздела, темы дисциплины	Наименование раздела, темы дисциплины	Наименование и содержание практических занятий (с указанием часов)	Трудовое количество, часы
	5 семестр		16
P1	Элементы общей топологии	Топологические пространства	4
		Топологические инварианты. Рубеж 1	4
P2	Топология многообразий	Основные понятия	2
		Топологические многообразия малой размерности	4
		Рубеж 2	2
	6 семестр		14
P3	Дифференциальная геометрия	Геометрия кривых в евклидовом пространстве	4
		Рубеж № 3	2
		Геометрия поверхностей в евклидовом пространстве	2
		Рубеж №4	2
		Внутренняя геометрия поверхностей	2
P4	Неевклидовы геометрии	Неевклидовы геометрии	2

Содержание практических занятий

5 семестр

Раздел 1. Элементы общей топологии

Тема 1. Топологические пространства

Определение и примеры топологического пространства. Подпространство топологического пространства. Внутренность, замыкание, граница. Непрерывные отображения и гомеоморфизмы топологических пространств.

Тема 2. Топологические инварианты

Отделимость, связность и линейная связность топологических пространств, компактность и компакты в топологических пространствах.

Раздел 2. Топология многообразий

Тема 1. Основные понятия.

Определение и примеры многообразий. Многообразие с краем, локальные координаты точек многообразия. Отображение многообразий, определение гладкого многообразия. Примеры многообразий

Тема 2. Топологические многообразия малых размерностей.

Клеточные разбиения. Теорема Эйлера. Топологическая классификация ориентируемых замкнутых поверхностей, модели проективной плоскости.

6 семестр

Раздел 3. Дифференциальная геометрия

Тема 1. Кривые в трехмерном евклидовом пространстве.

Геометрические объекты: кривые - способы задания. Кривизна плоских кривых, пространственные кривые, репер Френе, кривизна и кручение пространственных кривых, формулы Френе.

Тема 2. Поверхности в трехмерном евклидовом пространстве.

Поверхности, способы задания поверхностей, координаты на поверхности, касательная плоскость, первая квадратичная форма поверхности, площадь поверхности, кривизна кривых на поверхности. Вторая квадратичная форма и ее свойства, инварианты пары квадратичных форм, средняя и гауссова кривизна поверхности.

Тема 3. Внутренняя геометрия поверхности.

Предмет внутренней геометрии поверхности, теорема Гаусса. Геодезическая кривизна, геодезические линии и их свойства.

Раздел 4. Неевклидовы геометрии

Тема 1. Неевклидовы геометрии

Гиперболическое пространство. Модель Кэли-Клейна плоскости Лобачевского. Понятие о сферической и эллиптической геометрии.

4.4 Контрольная работа

Учебным планом контрольная работа не предусмотрена.

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

При прослушивании лекций рекомендуется в конспекте отмечать все важные моменты, теоремы и формулы, доказательство теорем, свойств, на которых заостряет внимание преподаватель. Перед лекцией необходимо повторить материал, выделить непонятные места в лекции, чтобы обсудить их на занятии.

Практические занятия будут проводиться с использованием различных технологий (индивидуализированного обучения, групповой формы обучения)

Для текущего контроля успеваемости по очной форме обучения преподавателем используется балльно-рейтинговая система контроля и оценки академической активности. Поэтому настоятельно рекомендуется тщательно прорабатывать материал дисциплины при самостоятельной работе, участвовать во всех формах обсуждения и взаимодействия, как на лекциях, так и на практических занятиях в целях лучшего освоения материала и получения высокой оценки по результатам освоения дисциплины.

Выполнение самостоятельной работы подразумевает самостоятельное изучение разделов дисциплины, подготовку к практическим занятиям, к рубежным контролям, подготовку к зачету и экзамену.

Рекомендуемая трудоемкость самостоятельной работы представлена в таблице:

Рекомендуемый режим самостоятельной работы

Шифр СРС	Виды самостоятельной работы студентов (СРС)	Трудоемкость, часы
С 1	Самостоятельное изучение разделов, тем дисциплины, не вошедших в лекционный курс: - Неевклидовы геометрии - Модели проективного пространства	32
С 2	Подготовка к практическим занятиям (по 4 часа на каждое занятие)	44
	Подготовка к рубежному контролю (по 2 часа на каждый рубежный контроль)	8
С 3	Подготовка к зачету	36
Всего:		120

6. Фонд оценочных средств для аттестации по дисциплине

6.1. Перечень оценочных средств

1. Балльно-рейтинговая система контроля и оценки академической активности студентов в КГУ (для очной формы обучения)

2. Перечень вопросов к зачету.

3. Задания для рубежного контроля №1-4.

4. Перечень вопросов для самостоятельного изучения.

6.2. Система балльно-рейтинговой оценки работы студентов по дисциплине

№	Наименование	Содержание	
		Распределение баллов за семестр	Промежуточная аттестация
1	Распределение баллов за семестр по видам учебной работы	Распределение баллов за 5 семестр	

		Посещение лекций	Практические занятия (включая выполнение домашней работы)	Индивидуальные задания	Рубеж 1	Рубеж 2	Зачет
		1 балл за занятие	2 балла за занятие	До 16 баллов	До 10 баллов	До 24 баллов	
		до 8	до 12	До 16	До 10	До 24	30
		Распределение баллов за 6 семестр					
		Посещение лекций	Практические занятия (включая выполнение домашней работы)	Индивидуальные задания	Рубеж 3	Рубеж 4	Экзамен
		1 балл за занятие	2 балла за занятие	До 13 баллов	До 20 баллов	До 20 баллов	30
		до 7	До 10	До 13	До 20	До 20	30
2	Критерий пересчета баллов в традиционную оценку по итогам работы в семестре и экзамена	60 и менее баллов не зачтено, (неуд.) 61-73 балла – оценка 3 (удовлетворительно), (зачтено) 74-90 балла – оценка 4 (хорошо) 91-100 баллов – оценка 5 (отлично)					
3	Критерий допуска к промежуточной аттестации по дисциплине (зачет, экзамен), возможности получения автоматического зачета (экзаменационной оценки) по дисциплине	Для допуска к промежуточной аттестации (зачету,) студент должен выполнить все рубежные работы и набрать по итогам текущего и рубежного контроля не менее 50 баллов. Для получения экзаменационной оценки (зачета) «автоматически» студенту необходимо набрать за семестр следующее минимальное количество баллов: - 61 для получения зачета «автоматически». По согласованию с преподавателем студенту, могут быть добавлены дополнительные (бонусные) баллы за активное участие в работе на занятиях, оригинальность принятых решений в ходе выполнения практических работ					
4	Формы и виды учебной работы для неуспевающих (восстановившихся на курсе обучения) студентов для получения недостающих баллов в конце семестра	В случае если к промежуточной аттестации набрана сумма менее 50 баллов, студенту необходимо набрать недостающее количество баллов за счет выполнения дополнительных заданий, до конца последней (зачетной) недели семестра. При этом необходимо проработать материал всех пропущенных практических работ. Формы дополнительных заданий (назначаются преподавателем): - выполнение и защита отчетов по пропущенным практическим занятиям (0,5 балла); - прохождение рубежного контроля (баллы в зависимости от рубежа). Ликвидация академических задолженностей, возникших из-за разницы в учебных планах при переводе или восстановлении, проводится путем выполнения дополнительных заданий, форма и объем которых определяется преподавателем.					

6.3. Процедура оценивания результатов освоения дисциплины

Рубежные контроли проводятся в форме самостоятельной письменной работы.

На рубежи 2, 3, 4 студенту отводится время не менее 90 минут, на рубеж 1 – не менее 30.

Преподаватель оценивает в баллах результаты каждого студента по количеству правильных ответов и заносит в ведомость учета текущей успеваемости.

Для зачета студенту предлагается шесть вопросов, по 5 баллов каждый.

Время, отводимое студенту на экзаменационное задание, составляет не менее одного астрономического часа.

Результаты текущего контроля успеваемости и зачета заносятся преподавателем в экзаменационную ведомость, которая сдается в организационный отдел института в день зачета, а также выставляются в зачетную книжку студента.

6.4. Примеры оценочных средств для рубежных контролей и зачета

Примерные вопросы к зачету

5 семестр

1. Определение и примеры метрических пространств.
2. Открытые множества в метрических пространствах.
3. Непрерывное отображение метрических пространств.
4. Определение и примеры топологических пространств.
5. Внутренность, замыкание и граница множества в топологическом пространстве.
6. Непрерывные отображения и гомеоморфизм топологических пространств.
7. Связность и линейная связность топологических пространств.
8. Аксиомы отделимости топологического пространства.
9. Компактность топологического пространства.
10. Критерий компактности подмножества евклидова пространства.
11. Определение и примеры топологических многообразий.
12. Гладкие многообразия.
13. Погружение многообразий.
14. Простейшие замкнутые поверхности.
15. Клеточное разбиение, триангуляции поверхности.
16. Определение и примеры ориентируемых и неориентируемых поверхностей.
17. Эйлерова характеристика поверхности (определение и теорема о независимости характеристики от разбиения).
18. Связная сумма поверхностей. Эйлерова характеристика связной суммы поверхностей.
19. Теорема классификации замкнутых поверхностей.
20. Связь эйлеровой характеристики поверхности и её рода.

6 семестр

1. Вектор – функция скалярного аргумента. Понятие линии и кривой.
2. Регулярные кривые.
3. Касательная к кривой.
4. Нормальная плоскость к линии.
5. Длина дуги. Натуральный параметр.
6. Кривизна кривой. Репер Френе.
7. Формулы Френе.
8. Кручение кривой.
9. Кривизна и кручение в произвольной параметризации.
10. Понятие поверхности.
11. Касательная плоскость к поверхности.

12. Нормаль к поверхности.
13. Первая квадратичная форма поверхности. Задачи.
14. Вторая квадратичная форма поверхности.
15. Кривизна линий на поверхности.
16. Формула Эйлера. Главные направления, главные кривизны, полная и средняя кривизны поверхности.
17. Типы точек поверхности.
18. Поверхности постоянной кривизны. Пример.
19. Понятие об изгибании поверхности. Предмет внутренней геометрии поверхности.
20. Геодезическая кривизна линий на поверхности.
21. Геодезическая линия, ее свойства. Примеры геодезических линий.
22. Геодезический треугольник и его дефект.

Рубеж № 1.

Ответить на следующие вопросы теории, привести примеры там, где это необходимо (по 1 баллу за задание).

1. Определение и примеры метрических пространств.
2. Открытые множества в метрических пространствах.
3. Непрерывное отображение метрических пространств.
4. Определение и примеры топологических пространств.
5. Внутренность, замыкание и граница множества в топологическом пространстве.
6. Непрерывные отображения и гомеоморфизм топологических пространств.
7. Связность и линейная связность топологических пространств.
8. Аксиомы отделимости топологического пространства.
9. Компактность топологического пространства.
10. Критерий компактности подмножества евклидова пространства.

Рубеж №2

(по 4 балла за задание)

1. Доказать, что ρ задают метрику на R^2 , $x(x_1, x_2), y(y_1, y_2) \in R^2$.
 $\rho_1(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$
 $\rho_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
2. Доказать, что любые два интервала в R^1 гомеоморфны.
3. Доказать, что $\chi(F_1 \# F_2) = \chi(F_1) + \chi(F_2) - 2$.
4. Пусть F – замкнутая ориентируемая поверхность рода g . Доказать, что $\chi(F) = 2 - 2g$.
5. Известно, что поверхность F имеет 4 компоненты края и ее эйлерова характеристика равна -7. Определить тип поверхности F .
6. Известно, что поверхность F имеет 3 компоненты края и ее эйлерова характеристика равна -5. Определить тип поверхности F .

Рубеж № 3.

1. Дана кривая $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = \sin t$.

Найти:

а) (6 баллов) кривизну и кручение линии в произвольной точке кривой;

б) (6 баллов) уравнения касательной прямой, нормальной плоскости, соприкасающейся плоскости, бинормали, главной нормали в точке $t = 0$.

2. (8 баллов) Найти длину дуги астроида $x = \alpha \cos^3 t$, $y = \alpha \sin^3 t$, $z = 0$ при $0 \leq t \leq 2\pi$.

Рубеж № 4

1. (6 баллов) Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^3 + 2y^2$ в точке $M(1, 1, 3)$.

2. (6 баллов) Найти угол между линиями $u = \frac{1}{2} \alpha v^2$, $u = -\frac{1}{2} \alpha v^2$ на поверхности, имеющей первую квадратичную форму $\varphi_1 = du^2 + (u^2 + \alpha^2)dv^2$ ($\alpha = \text{const}$).

3. (8 баллов) Дан эллипсоид вращения $x = \alpha \cos u \cdot \cos v$, $y = \alpha \cos u \cdot \sin v$, $z = c \sin u$.

а) Найти φ_1 , φ_2 .

б) В точке $u_0 = \pi/2$, $v_0 = 0$ найти k_1 , k_2 , K , H .

Вопросы для самостоятельного изучения

5 семестр

Различные модели проективной плоскости.

6 семестр

1. Аксиома Лобачевского. Параллельные прямые и их свойства в плоскости Лобачевского.

2. Сверхпараллельные прямые и их свойства в плоскости Лобачевского.

3. Угол параллельности. Функция Лобачевского.

4. Треугольники и четырехугольники в плоскости Лобачевского.

5. Пучки прямых в плоскости Лобачевского. Простейшие кривые.

6. Доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского. Модель Пуанкаре.

7. Доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского. Модель Кэли – Клейна.

8. Понятие о сферической геометрии.

9. Понятие об эллиптической геометрии.

6.5. Фонд оценочных средств

Полный банк заданий для текущего, рубежных контролей и промежуточной аттестации по дисциплине, показатели, критерии, шкалы оценивания компетенций, методические материалы, определяющие процедуры оценивания образовательных результатов, приведены в учебно-методическом комплексе дисциплины.

7. ОСНОВНАЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

7.1. Основная учебная литература

1. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии [Электронный ресурс] / Мищенко А. С, Фоменко А. Т. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 304 с. – Доступ из ЭБС «Консультант студента»
2. Курс геометрии: элементы топологии, дифференциальная геометрия, основания геометрии [Электронный ресурс] / Кузовлев В.П., Подаева Н.Г. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 208 с. – Доступ из ЭБС «Консультант студента»

7.2. Дополнительная литература

1. Подран, В.Е. Элементы топологии. – Изд.2-е, испр. И доп. – СПб.;М.: Краснодар : Лань, 2008.

8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

1. Козлова Д.Ф. Методические указания, упражнения и контрольные задания по курсу «Дифференциальная геометрия». – Курган: Курганский пединститут, 1991. – 31 с.

РЕСУРСЫ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

	Интернет-ресурс	Краткое описание
	http://en.edu.ru/	Портал является составной частью федерального портала "Российское образование". Содержит ресурсы и ссылки на ресурсы по естественно-научным дисциплинам (физика, математика, химия и биология).
	http://www.edu.ru/	Федеральный портал «Российское образование»
	http://www.msu.ru	Сайт Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова

Аннотация к рабочей программе дисциплины
Дифференциальная геометрия и топология
образовательной программы высшего образования –
программы специалитета

01.05.01 – Фундаментальные математика и механика

**Направленность (профиль): Математическое и компьютерное
моделирование механических систем**

Формы обучения: очная

Трудоемкость дисциплины: 53Е (180 академических часа)

Семестр: 5,6 (очная форма обучения).

Форма промежуточной аттестации: зачет(5 семестр), зачет(6 семестр)

Содержание дисциплины

Элементы общей топологии. Топология многообразий. Геометрия кривых в евклидовом пространстве. Геометрия поверхностей в евклидовом пространстве. Внутренняя геометрия поверхностей.